

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE DULAC PARA  
MODELOS DE LA BIOLOGÍA MATEMÁTICA

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas Aplicadas e  
Industriales

**Presenta:**

Emmanuel Mendoza Trinidad

**Asesor:**

Dr. José Geiser Villavicencio Pulido

**Lector interno:**

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

**Lector externo:**

Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.0.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.0.2. Objetivo general . . . . .	2
1.0.3. Objetivo específico . . . . .	2
1.0.4. Antecedentes . . . . .	2
1.0.5. Conceptos de biología . . . . .	3
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.0.1. Sistemas dinámicos . . . . .	6
2.0.2. Órbitas . . . . .	7
2.0.3. Campos vectoriales . . . . .	8
2.0.4. Estabilidad en sistemas dinámicos continuos . . . . .	10
2.0.4.1. Linealización . . . . .	12
2.0.5. Funciones de Liapunov . . . . .	16
2.0.6. Punto silla, sumidero, fuente . . . . .	21
2.0.7. Equivalencia de sistemas dinámicos . . . . .	25
2.0.8. Estabilidad estructural . . . . .	27
2.0.9. Existencia y unicidad . . . . .	29
2.0.10. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	30
<b>3. Criterios para la existencia y no existencia de órbitas periódicas</b>	<b>36</b>
3.1. Existencia . . . . .	36
3.1.1. Mapeo de Poincaré . . . . .	36
3.1.2. Estabilidad lineal de órbitas periódicas . . . . .	43
3.2. No existencia . . . . .	45

3.2.1. Criterio de Bendixson . . . . .	45
3.2.2. Criterio de Bendixson-Dulac . . . . .	46
3.2.3. Sistemas gradiente . . . . .	48
3.3. Criterios particulares y otros criterios . . . . .	49
3.3.1. El problema 16H . . . . .	49
<b>4. Resultados</b>	<b>60</b>
4.1. Método propuesto para la construcción de funciones de Dulac . . . . .	61
4.2. Ejemplos analizados con el método propuesto . . . . .	61
4.3. Resultados generales . . . . .	67
4.3.1. Casos particulares de modelos de interacciones entre especies. . . . .	70
4.3.2. Generalización de modelos . . . . .	74
4.4. Otras generalizaciones . . . . .	82
4.5. Conclusiones y Perspectivas . . . . .	83
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>
<b>Apéndices</b>	<b>90</b>
<b>A.</b>	<b>91</b>
<b>B.</b>	<b>93</b>

*Dedicado a  
mi familia*

# Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres Refugio Trinidad R. y Crescencio Mendoza M., a mi hermano Adan Mendoza T., por su continuo e incondicional apoyo. A mi novia Patricia Pérez por siempre apoyarme en este proceso de mi vida.

A mi asesor el Dr. José Geiser Villavicencio Pulido de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Lerma, por su eficaz y profesional dirección que ha hecho posible la elaboración de los resultados propuestos en este trabajo.

A mis sinodales el Dr. Baltazar Aguirre Hernández, el Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro. Por sus valiosas observaciones a este trabajo, y por el apoyo y disposición que siempre me ofrecieron.

A mis compañeros Daniel Allard Oropeza, María de los Ángeles y Jerónimo Hernández, por su apoyo y gran calidad humana, así como la amistad que siempre me ha brindado.

Finalmente agradecer a Conacyt, y a la UAM-I por permitirme ser parte de su comunidad estudiantil.

# Resumen

En la naturaleza existen diversas interacciones entre especies. En la biología de poblaciones algunos ejemplos de estas interacciones son: mutualismo, parasitismo y comensalismo. En la biología matemática han sido construidos modelos matemáticos para entender el efecto que estas interacciones tienen en la dinámica poblacional, sin embargo, hay preguntas que aún siguen abiertas. Por ejemplo se desconoce si aparecen oscilaciones sostenidas o no como soluciones del modelo. En ese sentido, existen criterios sobre existencia o no existencia de órbitas periódicas. En particular el criterio de Bendixson es una herramienta muy usada para descartar la existencia de ciclos límite, sin embargo, este criterio solo se aplica cuando la divergencia del campo vectorial no cambia de signo. Una ligera generalización del criterio de Bendixson es el criterio de Dulac. La desventaja de este criterio es que se necesita una función de Dulac, la cual no es fácil de construir en muchos casos. En este trabajo de tesis, se presentan resultados que permiten la construcción de funciones de Dulac para algunos modelos de la ecología, lo que descarta la existencia de órbitas periódicas.

# Índice de figuras

2.1. Ejemplo de un campo vectorial asociado a $F$ . . . . .	8
2.2. Campo vectorial asociado a $F(x, y) = (-y, x)$ . . . . .	9
2.3. Campo vectorial asociado a $F(x, y) = (x, -y)$ . . . . .	10
2.4. Campo vectorial apuntando hacia el punto fijo $\bar{x}$ . . . . .	17
2.5. Gradiente perpendicular al vector tangente a lo largo de la curva $V = C$ . . . . .	18
2.6. Conjuntos de nivel de $V$ , $0 < C_1 < C_2 < C_3$ . . . . .	18
2.7. Geometría asociada a la elección de vecindades en la prueba del teorema (2.2). . . . .	20
2.8. Plano fase: silla de montar para $x' = -x, y' = y$ . . . . .	24
2.9. Plano fase del tipo sumidero. . . . .	25
2.10. Plano fase del tipo fuente. . . . .	25
2.11. Órbitas estructuralmente estables según la definición 2.20. . . . .	28
2.12. Estabilidad estructural de Andronov según la definición 2.21. . . . .	29
2.13. Arco transversal $\Sigma$ al campo vectorial. . . . .	33
2.14. Dos puntos fijos $p_1$ y $p_2$ del campo vectorial contenido en $\omega(p)$ . . . . .	34
3.1. Mapeo de Poincaré. . . . .	37
3.2. Línea recta $\Sigma$ normal a $\Gamma$ en 0. . . . .	39
3.3. Mapeo de Poincaré para el sistema del ejemplo 3.2. . . . .	41
4.1. Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.2). . . . .	63
4.2. Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.3). . . . .	65
4.3. Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.4). . . . .	67
4.4. Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.7). . . . .	72
4.5. Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.8). . . . .	74

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.0.1. Planteamiento del problema

Conocer la dinámica de fenómenos de la biología ha sido de interés fundamental para la biología matemática. Lo anterior es debido a que conocer la evolución de un fenómeno en estudio permite conocer los posibles escenarios que se presentarán a través del tiempo. Por ejemplo, si el modelo presenta órbitas periódicas (oscilaciones sostenidas) o si se descarta la existencia de ellas. Ambos escenarios tienen implicaciones en la dinámica del fenómeno. Por ejemplo, en la ecología matemática la existencia de órbitas periódicas puede ser un escenario catastrófico para las poblaciones, ya que si la amplitud de las oscilaciones es muy grande puede ser que bajo pequeñas perturbaciones en el hábitat la población este ante un escenario de extinción. Sin embargo, cuando no existen órbitas periódicas como soluciones del modelo se puede demostrar que las poblaciones, bajo algunas condiciones sobre los parámetros del modelo, tienden a un equilibrio poblacional.

Es conocido que existen criterios para demostrar tanto existencia como no existencia de órbitas periódicas, sin embargo la implementación de dichos criterios requieren de la existencia de funciones que permitan discriminar uno u otro escenario, por ejemplo, la construcción de un mapeo de Poincaré asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales demuestra la existencia de una órbita periódica, mientras que la construcción de una función de Dulac asociada a un sistema de ecuaciones diferenciales descarta la existencia de órbitas periódicas.

En tiempos recientes se han propuesto métodos que cambian el problema de encontrar una función de Dulac por construir una función  $c(x_1, x_2)$  que permite resolver una ecuación diferencial parcial cuya solución es una función de Dulac. Sin embargo, ambos problemas requieren más de la experiencia en la construcción de dichas funciones que en la aplicación de un método explícito para encontrarlas.

Motivado por esta problemática es que en este trabajo se propone un método que permite proponer dicha función  $c(x_1, x_2)$ , para algunos modelos de la biomatemática, lo que permitirá descartar la existencia de órbitas periódicas en modelos de interacciones entre especies.

### 1.0.2. Objetivo general

Proponer un método que facilite la construcción de funciones de Dulac para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizados en la biología matemática.

### 1.0.3. Objetivo específico

- Proponer un método para la construcción de una función auxiliar  $c(x_1, x_2)$  que permita resolver una ecuación diferencial parcial, asociada a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución es una función de Dulac para el sistema.
- Aplicar los resultados a modelos de interacción entre dos especies que comparten recursos para descartar la existencia de órbitas periódicas.

### 1.0.4. Antecedentes

Se puede considerar a J. H. Poincaré (1854 – 1912) como el pionero de la teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. La clave de su estudio fue obtener una caracterización de los posibles comportamientos locales y globales de las soluciones en un sistema dinámico sin conocerlas explícitamente. En este tipo de problemas Poincaré trabajó arduamente ideando herramientas para su estudio. El mapeo de Poincaré, el teorema de la región anular, el método de pequeños parámetros, son algunos de los trabajos realizados por Poincaré.

Uno de los conceptos importantes dentro de esta teoría es el concepto de *estabilidad* introducido por el matemático ruso A. M. Lyapunov (1857 – 1918) que mediante su investigación sentó las bases de esta teoría que lleva su nombre, y ha sido referente para establecer algunas variaciones este concepto.

Existen algunos criterios particulares para determinar la no existencia de órbitas periódicas. Uno de ellos es el criterio de I. O. Bendixson (1861 – 1935) el cual hace uso del teorema de Green estableciendo la relación entre la existencia de trayectorias cerradas y la divergencia del campo vectorial en un sistema diferencial planar en  $\mathbb{R}^2$ . Esta relación que bajo ciertas hipótesis niega la existencia de órbitas periódicas. Una ligera generalización al criterio de Bendixson fue propuesta por H. C. R. Dulac (1870 – 1955). Esta condición junto con la de Bendixson, fueron utilizadas para descartar la existencia de soluciones periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias de mayor dimensión [7].

Una contribución importante en el estudio de ciclos límites es propuesta por el matemático alemán D. Hilbert (1892 – 1943). En su investigación formula uno de los problemas más relevantes en la teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, el cual se conoce como el problema 16 de Hilbert, esta pregunta, que si dado un modelo de ecuaciones diferenciales polinomiales ¿cuál es el número de órbitas aisladas que puede tener este sistema?. En la actualidad se desconoce una respuesta aún cuando los grados de los polinomios es dos, y ha sido fuente de inspiración para desarrollar más resultados para el estudio de las órbitas periódicas.

### **1.0.5. Conceptos de biología**

#### **Simbiosis**

En la biología y ecología existen diversas interacciones entre especies las cuales comparten el mismo hábitat, desde células hasta plantas, animales y seres humanos, entre otros. Este tipo de asociaciones pueden permitir la coexistencia entre especies, o en algunos casos extremos la extinción alguna de ellas, es decir, las interacciones entre dos organismos en un determinado ambiente, pueden tener consecuencias biológicas y ecológicas importantes, así como consecuencias evolutivas. Esta clase de relaciones se le llama simbiosis, este concepto fue introducido por primera ocasión en 1879 por el microbiólogo alemán Heinrich Anton de Bary (1831 – 1888), el cual lo definió como : “el viviendo juntos de organismos diferentes ”, los organismos que se asocian bajo cierto tipo de entorno, se les denomina simbiosis [3]. La mayoría de las ocasiones las relaciones entre simbiosis afectan directamente la capacidad de carga. Algunos tipos de simbiosis son los siguientes:

#### **Mutualismo**

El mutualismo es cualquier relación entre individuos de especies diferentes donde ambas especies obtienen un beneficio, a menudo implica el intercambio mediante el cual las dos especies simbiosis salen beneficiadas, ya sea por medio de transporte, comida o protección, entre otras. Por ejemplo el mutualismo entre las abejas y las flores de las plantas, las abejas extraen el polen de las flores, mientras riegan el polen en este proceso [8], otro ejemplo de mutualismo son los arrecifes de coral, producto de mutualismos entre organismos coralinos.

#### **Comensalismo**

Es una clase de relación donde un organismo se beneficia, pero sin afectar al otro, es decir, es una interacción neutral (no hay daño), donde la especie beneficiada se llama comensal y la otra se llama anfitrión. Un ejemplo de relación de comensalismo aparece entre las epífitas [12] (que son pequeñas

plantas) que crecen por lo general sobre árboles, usando como apoyo las ramas o el tronco del árbol para crecer, pero no afecta con una relación parasitaria, ya que los nutrientes necesarios para su crecimiento los absorbe del entorno y no del anfitrión (que en este caso es el árbol). Otro tipo de comensalismo es la relación de coexistencia (bajo ciertas condiciones), entre mejillones (*Septifer virgatus*) y percebes (*Capitulum mitella*), ya que la población de mejillones aumenta cerca del entorno del percebe, en cambio los percebes no reciben ningún beneficio por esta interacción[39].

### **Parasitismo**

Es un tipo de relación simbiótica donde uno de los dos simbioses se ve beneficiado a expensas del otro por este tipo de relación. Los parásitos son organismos que necesitan más de un huésped se denominan macroparásitos, algunos de ellos son piojos, pulgas, hongos, nemátodos, entre otros. Este tipo de organismos no suelen completar su ciclo de vida en un solo huésped. Otro tipo de parásitos son los microparásitos, estos organismos suelen ser más pequeños, como los virus o las bacterias y pueden ser transmitidos de un hospedero a otro [34]. Un ejemplo de parasitismo es la *Encarsia perplexa* el cuál es un endoparásito que se alimenta de otros parásitos incluyendo a los de su misma especie, además este tipo de parásitos se desarrolla uno por hospedero [36]. Algunos parásitos no son amigables con el organismo que los hospeda. Algunos pueden causar daños considerables incluso la muerte de su hospedero. Ejemplo es esto es el parásito *Entamoeba histolytica* el cual vive en el intestino de humanos y animales, y se trasmite cuando el virus se ingiere mediante alimentos o agua contaminados. Puede causar diarrea, desarrollar colitis, y es uno de los principales responsables de enfermedades como la amebiasis [1].

### **Amensalismo**

El amensalismo es la interacción biológica entre dos organismos de especies distintas, en el cual uno de los organismos resulta dañado, y el otro no se ve afectado, ni beneficiado. Este tipo de relación simbiótica ocurre cuando una de las dos especies crea condiciones intolerables para las otras poblaciones, o cuando afectan directamente el crecimiento y desarrollo de la otra especie, un ejemplo de amensalismo es la relación que tienen las plantas herbáceas y los árboles más grandes que estas, ya que las plantas herbáceas crecen debajo de la sombra y el poco terreno que dejan los árboles, absorben nutrientes del entorno, sin dañar a los demás, el árbol no se ve afectado ni beneficiado por este tipo de planta [6].

Los tipos de simbiosis mencionados anteriormente, son ejemplos de competencia entre especies por un recurso común limitado, recurso que si se agota impacta directamente en la capacidad de carga de las especies que lo necesitan. Los resultados evolutivos de las interacciones en la competencia son: Exclusión competitiva, es decir, una especie desplaza a la otra hasta su extinción. Coexistencia: ambas

especies permanecen en un hábitat ya que cada una de ellas explotan recursos diferentes.

Existen dos tipos de competencia la intraespecífica y la interespecífica, a continuación se define cada una de ellas;

### **Competencia intraespecífica**

Este tipo de competencia se da entre individuos de la misma especie por el recurso el cual es limitado. En algunas ocasiones puede afectar la capacidad de carga de la población, y posiblemente llegar a la extinción de la misma especie. Por ello individuos que compiten, pueden perder recursos, o la capacidad de reproducirse, incluso el hábitat donde existen. Generalmente la competencia intraespecífica es más intensa que la interespecífica.

### **Competencia interespecífica**

Este tipo de competencia se da entre individuos de diferentes especies por el recurso limitado. Recurso que puede ser, territorio, comida, compañeros, presas, etc. Un ejemplo de competencia interespecífica son los leones y cebras, ya que el león depreda a las cebras, mientras estas se alimentan del pastizal.

El trabajo de esta tesis se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se da un esquema de los antecedentes a este trabajo. Además se describe el tipo de modelos a analizar. En el Capítulo 2 se define la teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos a utilizar. En el Capítulo 3 se describen algunos criterios afirmativos y negativos para la existencia de órbitas periódicas. En el Capítulo 4 se presentan los resultados y perspectivas. Finalmente, se muestra la bibliografía utilizada y los anexos.

# Capítulo 2

## Preliminares

En esta sección se introducen los conceptos de la teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos que serán de utilidad en los resultados que se mostrarán en este trabajo. Particularmente, un sistema dinámico es uno de los conceptos más importantes en la modelación matemática ya que ha sido de gran ayuda, para describir y modelar fenómenos en otras ciencias, por citar algunas: química, física, biología, ecología, entre otras.

### 2.0.1. Sistemas dinámicos

**Definición 2.1.** *Dado un punto inicial  $x \in \mathbb{R}^n$ , se define como espacio de estados al conjunto  $X$  formado por la secuencia de puntos o trayectoria en  $\mathbb{R}^n$ , que representa la evolución de  $x$  a medida que el tiempo transcurre.*

**Definición 2.2.** *Un sistema dinámico es una tripleta  $\{T, X, \varphi^t\}$ , donde  $T$  es el conjunto de tiempos,  $X$  es un espacio de estados y  $\varphi^t : X \rightarrow X$  es una familia de operadores de evolución parametrizados por  $t \in T$  que satisfacen las siguientes propiedades:*

- $\varphi^0 = Id$ , donde  $Id(x) = x$  para todo  $x \in X$ ,
- $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$  para todo  $t, s \in T$ .

A continuación se describen de manera explícita, los otros dos conceptos utilizados en la definición de un sistema dinámico:

- El tiempo

La evolución de un sistema dinámico representa un cambio en algún estado del sistema respecto a la variable independiente, a la cual nos referimos como tiempo,  $t \in T$ . En esta tesis se considerarán sistemas dinámicos continuos, así que el tiempo es considerado continuo, es decir  $t \in \mathbb{R}$ .

- El operador de evolución

El componente principal de un sistema dinámico es una regla de evolución, esta regla determina el estado  $x_t$  del sistema en el tiempo  $t$ , siempre que se conozca el estado inicial  $x_0$ .

La forma general de especificar dicha evolución, es suponer un mapeo  $\varphi^t$  para  $t \in T$  que esta definido en el espacio de estados  $X$  de la siguiente forma:

$$\varphi^t : X \rightarrow X.$$

Dicho mapeo transforma un estado inicial  $x_0 \in X$  en algún estado  $x_t \in X$  en el tiempo  $t$  de la siguiente manera;

$$x_t = \varphi^t x_0.$$

El mapeo  $\varphi^t$  a menudo es llamado operador de evolución del sistema dinámico.

**Observación 2.1.** *Una ecuación diferencial ordinaria autónoma, puede ser considerada como un sistema dinámico, el cual puede ser escrito de la siguiente manera:*

$$x' = F(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (2.1)$$

Donde  $F$  es una función continua  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $\Omega$  es un conjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$ . La ecuación (2.1) es conocida también como ecuación autónoma.

### 2.0.2. Órbitas

Una órbita que comienza en un estado inicial  $x_0$  es un subconjunto ordenado del espacio de estados  $X$ , tal que

$$O(x) = \{x \in X : x = \varphi^t(x_0), \text{ para todo } t \in T, \text{ tal que } \varphi^t(x_0) \text{ esta definido}\}.$$

Una órbita también es llamada trayectoria.

La evolución de un sistema dinámico puede ser analizada a través de un retrato fase, el cual está compuesto por imágenes geométricas. Dichas imágenes geométricas asociadas al sistema dinámico son

las órbitas en el espacio de estados.

**Definición 2.3. (Punto crítico)**

Un punto  $x_0^* \in \mathbb{R}^n$  es llamado un punto crítico o solución de equilibrio del sistema (2.1), si sucede que:  $F(x_0^*) = 0$  para todo  $t \in T$ . Así, la órbita más sencilla de un sistema dinámico es un punto de equilibrio.

**Definición 2.4.** Un ciclo (u órbita)  $L_0$  del sistema (2.1) es una órbita, que no es un punto de equilibrio, tal que para cada  $x_0 \in L_0$  satisface  $\varphi^{t+T_0}(x_0) = \varphi^t(x_0)$  para algún  $T_0 > 0$ , para todo  $t \in T$ .

El mínimo  $T_0$  es llamado el periodo del ciclo  $L_0$ . Una órbita del sistema que empieza en el punto  $x_0 \in L_0$  volverá a este punto después de  $T_0$  unidades de tiempo. Cuando existe este comportamiento se dice que el sistema tiene oscilaciones periódicas, en el caso continuo un ciclo  $L_0$  es una curva cerrada.

**Definición 2.5.** Un ciclo  $L_0$  es llamado ciclo límite si en cualquier vecindad construida alrededor de  $L_0$  no hay otros ciclos.

### 2.0.3. Campos vectoriales

**Definición 2.6. (Campo Vectorial)**

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Un campo vectorial de clase  $C^k$ ,  $k \geq 1$  en  $\Omega$  es una aplicación  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$ . Un campo vectorial asocia a cada punto  $x \in \Omega$  es un vector que inicia en  $x$  y termina en  $x + F(x)$ .

El sistema (2.1) tiene la siguiente interpretación geométrica: la parte derecha se puede pensar como un campo vectorial, o campo de direcciones en el abierto  $\Omega$ , como se muestra en la Figura (2.1).

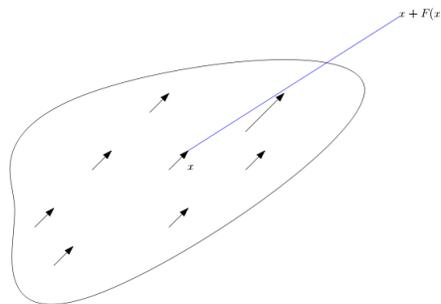


Figura 2.1: Ejemplo de un campo vectorial asociado a  $F$ .

A continuación se muestra el campo de direcciones asociado a dos campos vectoriales.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo  $C^\infty$  definido por

$$F(x, y) = (-y, x).$$

Entonces su representación gráfica se muestra en la Figura (2.2).

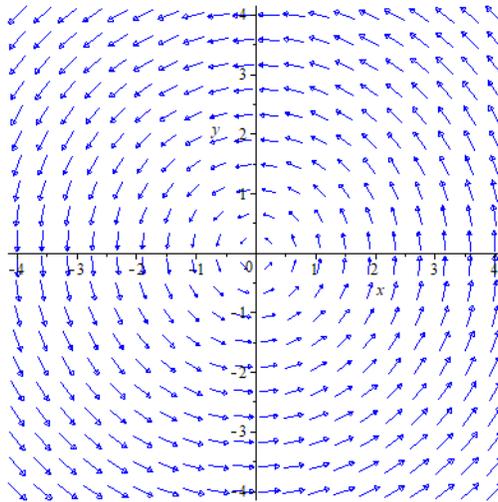


Figura 2.2: Campo vectorial asociado a  $F(x, y) = (-y, x)$ .

**Ejemplo 2.2.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo  $C^\infty$  definido por

$$F(x, y) = (x, -y).$$

Entonces su representación gráfica se muestra en la Figura (2.3)

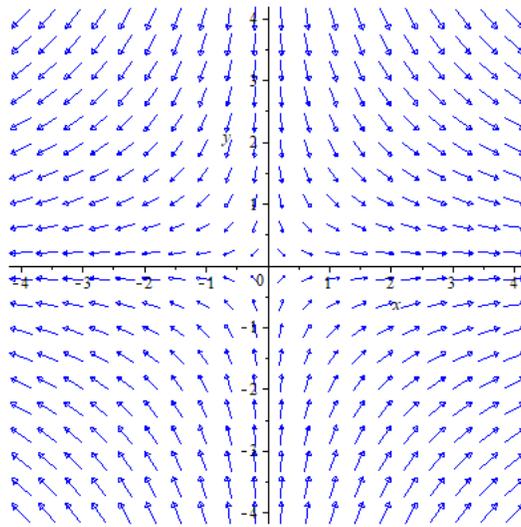


Figura 2.3: Campo vectorial asociado a  $F(x, y) = (x, -y)$ .

Una solución de la ecuación diferencial autónoma (2.1), es una función diferenciable  $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en algun intervalo abierto acotado o no, tal que para todo  $t \in I$  y  $\bar{x}(t) \in \Omega$ , y

$$\bar{x}' = \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = F(\bar{x}(t)). \quad (2.2)$$

Geoméricamente,  $\bar{x}(t)$  es una curva en  $\mathbb{R}^n$ , cuyo vector tangente  $\bar{x}'(t)$  existe para todo  $t \in I$  y es igual a  $F(\bar{x}(t))$ . Una condición inicial para una solución  $\bar{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la representamos de la siguiente forma:  $\bar{x}(t_0) = x_0$ , donde  $t_0 \in I$  y  $x_0 \in \Omega$ . En la siguiente sección se presentan resultados respecto a uno de los conceptos más importantes en sistemas dinámicos, el concepto de estabilidad.

#### 2.0.4. Estabilidad en sistemas dinámicos continuos

La propiedad de estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio en un sistema dinámico, es una de las características más importantes para describir el comportamiento de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Existen varias nociones de estabilidad de puntos de equilibrio o de órbitas del sistema, entre las cuales se pueden mencionar: estabilidad según Liapunov, estabilidad asintótica, estabilidad orbital, estabilidad orbital asintótica.

A continuación se enuncian las siguientes definiciones (ver[38]).

**Definición 2.7. (Estabilidad de Liapunov)**(ver [38])

Sea  $\bar{x}(t)$  una solución de la ecuación diferencial (2.1), entonces  $\bar{x}(t)$  se dice estable (o Liapunov estable), si dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , tal que para cualquier otra solución  $y(t)$  de la ecuación diferencial autónoma (2.1) satisface que si  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$  (donde  $|\cdot|$  es la norma en  $\mathbb{R}^n$ ), entonces  $|\bar{x}(t) - y(t)| < \epsilon$ , para  $t > t_0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Observación 2.2.** Una solución del sistema (2.1) que no es estable se dice que es inestable.

**Definición 2.8. (Estabilidad asintótica)**

Sea  $\bar{x}(t)$  una solución de la ecuación diferencial (2.1), entonces  $\bar{x}(t)$  se dice asintóticamente estable si es Liapunov estable y para cualquier otra solución,  $y(t)$ , de la ecuación (2.1), existe una constante  $b > 0$  tal que, si  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$ .

Hasta ahora se ha discutido la estabilidad de trayectorias, a continuación se introducirá una noción ligeramente diferente, pero importante, la noción de estabilidad orbital, para ello se definen los siguientes conceptos:

**Definición 2.9.** Una órbita positiva a través del punto  $x_0$ , para  $t \geq t_0$ , está dada por:

$$O^+(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x}(t), t \geq t_0, \bar{x}(t_0) = x_0\}. \quad (2.3)$$

El concepto de distancia entre un punto y un conjunto, se define a continuación:

**Definición 2.10.** Sea  $S \in \mathbb{R}^n$  un conjunto arbitrario y  $p \in \mathbb{R}^n$  un punto arbitrario. La distancia entre el punto  $p$  y el conjunto  $S$  es denotada y definida como:

$$d(p, S) = \inf_{x \in S} |p - x|. \quad (2.4)$$

**Definición 2.11. (Estabilidad orbital)**

Sea  $\bar{x}(t)$  una solución de la ecuación diferencial (2.1), entonces  $\bar{x}(t)$  es una órbita estable si, dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$ , tal que para cualquier otra solución  $y(t)$  del sistema (2.1), si  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$  entonces  $d(y(t), O^+(x_0, t_0)) < \epsilon$  para  $t > t_0$ .

**Definición 2.12. (Estabilidad orbital asintótica)**

Sea  $\bar{x}(t)$  una solución de la ecuación diferencial (2.1), entonces  $\bar{x}(t)$  es asintóticamente estable

orbitalmente, si es orbitalmente estable y para cualquier otra solución  $y(t)$ , del sistema (2.1), existe una constante  $b > 0$ , tal que, si  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$ , entonces  $\lim_{x \in S} d(y(t), O^+(x_0, t_0)) = 0$ .

En las siguientes secciones se enunciarán algunas definiciones y resultados, que serán de ayuda para comprender el concepto de estabilidad, de un sistema dinámico como el propuesto en la ecuación (2.1).

### 2.0.4.1. Linealización

El método de linealización, a menudo se usa para estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema dinámico como el dado por (2.1), en una vecindad de un punto de equilibrio del sistema. Es por esto que para determinar la estabilidad en el punto de equilibrio  $x_0^*$ , se debe entender la naturaleza de las soluciones cerca de  $x_0^*$ .

Estudiar las soluciones en una vecindad del punto de equilibrio  $x_0^*$  es equivalente a estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema lineal

$$x' = AX.$$

Con la matriz  $A = DF(x_0^*)$  cerca del punto de equilibrio  $x_0^*$ . La función lineal  $AX = DF(x_0^*)x$  es llamada la parte lineal de  $F$  en  $x_0^*$ .

Supóngase que existe otra solución  $y$  del sistema dinámico (2.1), y defínase

$$x = \bar{x} + y \tag{2.5}$$

Sustituyendo la ecuación (2.5) en la ecuación (2.1) y haciendo la expansión en series de Taylor de la matriz  $A = DF(x_0^*)$  alrededor de  $x_0^*$  se tiene

$$x' = \bar{x}' + y' = F(x_0^*) + DF(x_0^*)y + O(|y|^2). \tag{2.6}$$

Donde  $DF$  es la derivada de  $F$  y  $|\cdot|$  es la norma en  $\mathbb{R}^n$  (nota: para obtener la ecuación (2.6)  $F$  debe ser por lo menos dos veces diferenciable). Usando el hecho de que  $x'(t) = F(x_0^*)$  el sistema (2.6) se convierte en

$$y' = DF(x_0^*)y + O(|y|^2). \tag{2.7}$$

La ecuación (2.7) describe la evolución de las órbitas cerca de  $x_0^*$ . Para cuestiones de estabilidad interesa el comportamiento de soluciones arbitrariamente cercanas a  $x_0^*$ , entonces resulta razonable

que esta pregunta puede ser resuelta estudiando el siguiente sistema lineal asociado

$$y' = DF(x_0^*)y. \quad (2.8)$$

Sin embargo, si  $\bar{x}(t)$  es una solución de equilibrio, i.e.,  $\bar{x}(t) = x_0^*$  entonces  $DF(\bar{x}(t)) = DF(x_0^*)$  es una matriz con entradas constantes y la solución de la ecuación (2.8) a través del punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  con  $t = 0$  puede escribirse inmediatamente como

$$y(t) = e^{DF(x_0^*)t}y_0. \quad (2.9)$$

Un resultado de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (2.9) se muestra a continuación.

Considérese la siguiente ecuación, la cual es la linealización del sistema (2.1);

$$x' = AX \quad (2.10)$$

**Teorema 2.1.** (ver [2])

- a) Toda solución  $\bar{x} = \phi(t)$  del sistema (2.10) es estable si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa.
- b) Toda solución  $\bar{x} = \phi(t)$  del sistema (2.10) es inestable si al menos un valor propio de  $A$  tiene parte real positiva.
- c) Supóngase que todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real menor o igual a cero, y  $\lambda_1 = i\delta_1, \dots, \lambda_l = i\delta_l$  tienen parte real cero. Sea  $\lambda_j = i\delta_j$  de multiplicidad  $k_j$  es decir que el polinomio característico de  $A$  puede ser factorizado en la siguiente forma

$$p(\lambda) = (\lambda - i\delta_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\delta_l)^{k_l} q(\lambda).$$

Donde todas las raíces de  $q(\lambda)$  tienen parte real negativa. Entonces cualquier solución  $\bar{x} = \phi(t)$  del sistema (2.10) es estable si  $A$  tiene  $k_j$  vectores linealmente independientes para todo eigenvalor  $\lambda_j = i\delta_j$ , pues de otra manera toda solución  $\phi(t)$  es inestable.

*Demostración.*

- a) Toda solución  $\bar{x} = \psi(t)$  del sistema (2.10) es de la forma  $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$ . Sea  $\phi_{ij}(t)$  el elemento de la matriz  $e^{At}$  y sea  $\psi_1^0, \dots, \psi_n^0$  componentes de  $\psi(0)$ . Entonces el  $i$ -ésimo componente de  $\psi(t)$  es

$$\psi_i(t) = \phi_{i1}(t)\psi_1^0 + \dots + \phi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{\phi_{ij}}^n \phi_{ij}(t)\psi_j^0.$$

Supóngase que todos los eigenvalores de  $A$  son negativos. Entonces para cada número  $-\alpha$ , con  $-\alpha_1 < -\alpha < 0$  se puede encontrar un número  $K$  tal que  $\|\phi_{ij}(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}, t \geq 0$  consecuentemente

$$|\psi(t)| \leq \sum_{j=1}^n Ke^{-\alpha t} |\psi_j^0| = Ke^{-\alpha t} \sum_{j=1}^n |\psi_j^0|.$$

Para algunas constantes positivas  $K$  y  $\alpha$ . Ahora  $|\psi_j^0| \leq \|\psi(0)\|$  por lo tanto

$$\|\psi(t)\| = \max\{|\psi_1(t)|, \dots, |\psi_n(t)|\} \leq nKe^{-\alpha t} \|\psi(0)\|.$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Eligiendo  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{nK}$ . Entonces  $\|\psi(t)\| < \epsilon$  si  $\|\psi(0)\| < \delta(\epsilon)$  y  $t \geq 0$ , ya que

$$\|\psi(t)\| \leq nKe^{-\alpha t} \|\psi(0)\| < \frac{nk\epsilon}{nK} = \epsilon.$$

Consecuentemente la solución de equilibrio  $x^* \equiv 0$  es estable.

- b)** Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $A$  con parte real positiva y sea  $v$  un eigenvector de  $A$  con eigenvalor  $\lambda$ . Entonces  $\psi(t) = ce^{\lambda t}v$  es una solución del sistema (2.10) para alguna constante  $c$ . Si  $\lambda$  es real entonces  $v$  también es real y  $\|\psi(t)\| = |c|e^{\lambda t} \|v\|$ . Es claro que  $\|\psi(t)\|$  se aproxima al infinito cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para cualquier elección de  $c \neq 0$ . No importa qué tan pequeño. Por lo tanto  $x^* \equiv 0$  es inestable. Si  $\lambda = \alpha + i\beta$  es complejo, entonces  $v = v^1 + iv^2$  es también complejo, en este caso

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta}(v^1 + iv^2) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(v^1 + iv^2) \\ &= e^{\alpha t}[v^1 \cos(\beta t) - v^2 \sin(\beta t) + i(v^1 \sin(\beta t) + v^2 \cos(\beta t))]. \end{aligned}$$

Es una solución de valor complejo del sistema (2.10) por lo tanto

$$\psi'(t) = ce^{\alpha t}(v^1 \cos(\beta t) - v^2 \sin(\beta t)).$$

Es una solución de valor real del sistema (2.10) para cualquier elección de la constante  $c$ .  $\|\psi(t)\|$  es limitado a medida que  $t \rightarrow \infty$  si  $c$  o cualquier  $v^1$  o  $v^2$  es distinto de cero. Entonces  $x^* \equiv 0$  es inestable.

- c)** Si la matriz  $A$  tiene  $k_j$  vectores linealmente independientes para cada valor propio  $\lambda_j = \delta_j$  de multiplicidad  $k_j$ , entonces se puede encontrar una constante  $k$  tal que  $|(e^{At})_{ij}| \leq k$ . Y se tiene que  $\|\psi(t)\| \leq nk \|\psi(0)\|$  para toda solución  $\psi(t)$  del sistema (2.10). Se sigue inmediatamente de la prueba del inciso **a)** que  $x^* \equiv 0$  es estable. Por otra parte, si  $A$  tiene menos que  $k_j$  eigenvectores linealmente independientes con eigenvalores  $\lambda_j = i\delta_j$ , entonces el sistema (2.10) tiene soluciones de la forma

$$\psi(t) = ce^{i\delta_j t}[v + t(A - i\delta_j I)V].$$

Donde  $(A - i\delta_j I)V \neq 0$  si  $\delta_j = 0$ , entonces  $\psi(t) = c(v + tAv)$  es un valor real. Más aún  $\|\psi(t)\|$  es limitado a medida que  $t \rightarrow \infty$  para cualquier elección de  $c \neq 0$ . Similarmente, tanto las partes reales como las imaginarias de  $\psi(t)$ , son limitados en magnitud para cualquier  $\psi(0) \neq 0$  arbitrariamente pequeños si  $\delta_j \neq 0$ . Por lo tanto, la solución de equilibrio  $x^* \equiv 0$  es inestable.

□

**Ejemplo 2.3.** *En este ejemplo, se muestra que la estabilidad en la aproximación lineal del sistema (2.1), no necesariamente implica estabilidad del sistema (2.1). Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $\mathbb{R}^2$ .*

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(x^2 + y^2), \\y' &= x + y(x^2 + y^2).\end{aligned}\tag{2.11}$$

*El origen es un punto de equilibrio para este sistema. El campo vectorial linealizado sobre este equilibrio es representado mediante el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}x' &= -y, \\y' &= x.\end{aligned}\tag{2.12}$$

*Los eigenvalores de la matriz asociada con esta linealización son  $\pm i$ , y el origen es estable en la aproximación lineal (pero el sistema dinámico no es asintóticamente estable).*

En ocasiones se usa el término “linealmente estable ” para describir una solución que es estable en la aproximación lineal. Cuando los valores propios de la matriz cumplen con una condición, estos tipos de soluciones reciben un nombre especial. A continuación se definen soluciones con esta propiedad.

**Definición 2.13. (Punto fijo hiperbólico)**

*Sea  $x$  un punto fijo de  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $x$  es llamado punto fijo hiperbólico si ninguno de los valores propios de  $DF(x)$  tienen parte real cero.*

La hiperbolicidad ha sido un concepto importante dentro de la teoría de sistemas dinámicos, particularmente es usada en el estudio de la estabilidad en la linealización, la cual es reducida al estudio de las raíces del polinomio característico de la matriz asociada con la linealización en el punto de equilibrio a analizar.

**2.0.5. Funciones de Liapunov**

El método de Liapunov es una herramienta usada para determinar la estabilidad de los puntos fijos cuando la información obtenida de la linealización no es concluyente. Es decir, cuando el punto fijo no es hiperbólico.

El método de Liapunov funciona en  $n$ -dimensiones y en dimensiones infinitas. En esta tesis se considerará el plano  $\mathbb{R}^2$ . Considérese un campo vectorial en el plano con un punto fijo  $x^*$  y se desea determinar si es estable o inestable. En términos generales, de acuerdo con las definiciones anteriores se debe encontrar una vecindad  $U$  de  $x^*$  para el cual las órbitas que empiezan en  $U$  permanecen en  $U$  para todos los tiempos positivos. Esta condición se satisface si el campo vectorial es tangente al límite de  $U$  o apunta hacia  $x^*$ , (ver Figura 2.4). Esta condición debería seguir siendo cierta aún cuando  $U$  se contrae hacia  $x^*$ . El método de Liapunov proporciona una manera de estudiar la estabilidad de las soluciones, del campo vectorial asociado a la ecuación (2.1), en el entorno  $U$  cerca de  $x^*$ .

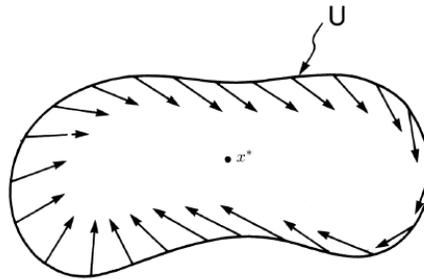


Figura 2.4: Campo vectorial apuntando hacia el punto fijo  $\bar{x}$ .

Supóngase que el siguiente campo vectorial:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

tiene un punto fijo  $(x^*, y^*)$  (supóngase que es estable). Se debe mostrar que en cualquier vecindad de  $(x^*, y^*)$  la condición anterior se cumple. Sea  $V(x, y)$  una función escalar en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  (y al menos de clase  $C^1$ ), con  $V(x^*, y^*) = 0$ , tal que la superficie de los puntos satisfacen  $V(x, y) = C$ . Donde:  $C = \{ \text{curvas constantes cerradas para diferentes valores de } C \text{ rodeando } (x^*, y^*) \text{ con } V(x, y) > 0 \text{ en una vecindad de } (x^*, y^*) \}$  (ver Figura 2.5).

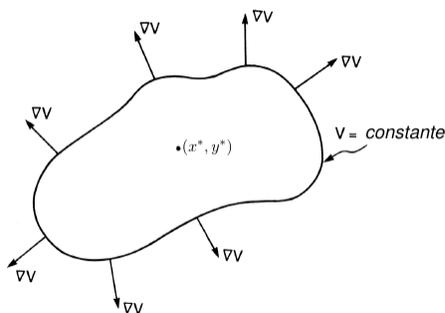


Figura 2.5: Gradiente perpendicular al vector tangente a lo largo de la curva  $V = C$ .

El gradiente de  $V$ , el cual es denotado por  $\nabla V$ , es un vector perpendicular al vector tangente a lo largo de la curva  $V = C$  que apunta en dirección creciente de  $V$  ( ver Figura 2.6). Entonces si el campo vectorial fuera siempre tangente o hacia el interior para cada una de estas curvas que rodean  $(x^*, y^*)$ , se tendrá lo siguiente:

$$\nabla V(x, y) \cdot (x', y') \leq 0.$$

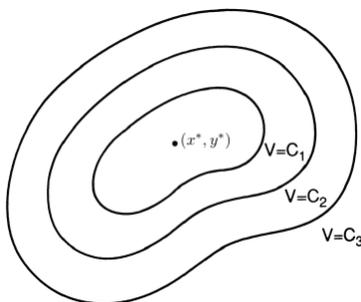


Figura 2.6: Conjuntos de nivel de  $V$ ,  $0 < C_1 < C_2 < C_3$ .

Donde el punto  $(\cdot)$  denota el producto escalar vectorial usual (esto es simplemente la derivada de  $V$  a lo largo de las órbitas del campo vectorial asociado al sistema (2.13), a veces se conoce como la derivada orbital). A continuación formalizamos las ideas anteriores en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** *Considérese el siguiente campo vectorial*

$$x' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Donde  $F$  es una función continua  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $x^*$  un punto fijo de (2.14) y sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  definida en alguna vecindad  $U$  de  $x^*$  tal que

- i)  $V(x^*) = 0$  y  $V(x) > 0$  si  $x \neq x^*$ ;
- ii)  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $U - \{x^*\}$ , entonces  $x$  es estable además, si;
- iii)  $\dot{V}(x) < 0$  en  $U - \{x^*\}$ , entonces  $x$  es asintóticamente estable.

*Demostración.* Considérese una bola centrada en  $x^*$  de radio  $\delta$ , es decir,

$$B_\delta(x^*) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| \leq \delta\}.$$

Donde  $\delta$  se elige tan pequeño que  $B_\delta(x^*) \subset U$ . Sea  $m$  el mínimo valor de  $V$  en la vecindad de  $B_\delta(x^*)$ . Entonces por el inciso i) del teorema (2.2),  $m > 0$ . Entonces se tiene

$$U_1 = \{x \in B_\delta(x^*) | V(x) < m\}.$$

Ahora considérese alguna trayectoria empezando en  $U_1$  (ver Figura 2.7). Por el inciso ii) en tal trayectoria  $V$  es decreciente. Por lo tanto por la construcción de  $B_\delta(x^*)$  la trayectoria no puede dejar  $B_\delta(x^*)$ . Esto muestra que  $x^*$  es estable ya que  $\delta$  es arbitraria.

Ahora supóngase que se cumple el inciso iii), así que  $V$  es estrictamente decreciente en órbitas dentro de  $U - \{x^*\}$ . Sea  $x(t)$  una trayectoria empezando en  $U_1 - \{x^*\}$ . Entonces ya que  $B_\delta(x^*)$  es compacto, existe una secuencia de tiempos  $\{t_n\}$  con  $t_n \rightarrow \infty$  si  $n \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_n)$  converge a un punto  $x_0$  si  $n \rightarrow \infty$ , ahora se argumentará que  $x_0 = x^*$ .

Esto se puede ver de la siguiente manera. A continuación se dará una prueba por reducción al absurdo. Supóngase que  $x_0 \neq x^*$ , entonces existe un  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que  $x_0 \notin B_\epsilon(x^*)$ . Repitiendo el mismo argumento dado anteriormente, se puede concluir que existe una vecindad de  $x^*$ ,  $\tilde{U}_1 \subset B_\epsilon(x^*)$ , tal que cualquier trayectoria comenzando en  $\tilde{U}_1$  no sale de  $B_\epsilon(x^*)$  (ver Figura 2.7).

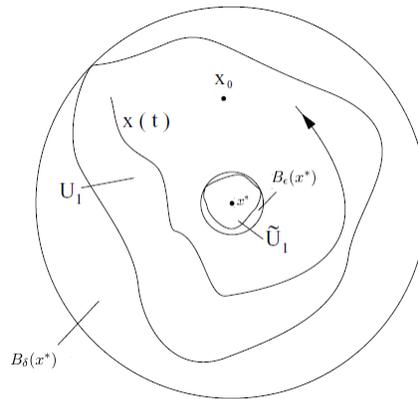


Figura 2.7: Geometría asociada a la elección de vecindades en la prueba del teorema (2.2).

De esto se sigue que la trayectoria  $x(t)$  no puede entrar a  $\tilde{U}_1$ . Entonces, en  $U_1 - \tilde{U}_1$ ,  $\dot{V}$  está acotado por el cero, es decir, se tiene la siguiente estimación

$$\dot{V} \leq -K < 0, \quad \text{para algún } K > 0.$$

Dado que  $x(t)$  no puede entrar en  $\tilde{U}_1$ , se puede aplicar esta estimación a lo largo de la trayectoria  $x(t)$  para obtener la siguiente desigualdad;

$$\begin{aligned} V(x(t_n)) - V(x(0)) &= \int_0^{t_n} \dot{V}(x(s)) dt, \\ &\leq -K t_n, \end{aligned}$$

o

$$V(x(t_n)) \leq V(x(0)) - K t_n.$$

Ahora si  $n \rightarrow \infty$  esta desigualdad implica que  $V(x(t_n))$  debe ser negativo, lo cual es una contradicción, ya que se sugirió  $x_0 \neq x^*$ . Por lo tanto  $x^* = x_0$ .

□

**Observación 2.3.** Se Considera a  $V$  como una función de Liapunov. Si  $V' < 0$  en  $U - \{x^*\}$ , el término función estricta de Liapunov es usado a menudo. Obsérvese que  $U$  puede ser elegido para que sea todo  $\mathbb{R}^n$ , entonces se dice que  $x^*$  es globalmente asintóticamente estable, si los incisos **i)** y **iii)** se cumplen.

**Ejemplo 2.4.** *Considérese el siguiente campo vectorial:*

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x + \epsilon x^2 y.\end{aligned}$$

Los eigenvalores de la matriz  $DF$  evaluados en el punto fijo  $(x, y) = (0, 0)$  son  $\pm i$  entonces este punto es un punto no hiperbólico, a continuación se determina si este punto es estable.

Sea  $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ , observe que  $V(0, 0) = 0$ , y  $V(x, y) > 0$  para una vecindad del punto  $(0, 0)$ . Entonces

$$\begin{aligned}V' &= \nabla V(x, y) \cdot (x', y') \\&= (x, y) \cdot (y, \epsilon x^2 y - x) \\&= xy + \epsilon x^2 y^2 - xy.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $V' = \epsilon x^2 y^2$ . Entonces por el teorema (2.2)  $(0, 0)$  es globalmente estable para  $\epsilon < 0$ .

### 2.0.6. Punto silla, sumidero, fuente

Dentro de la teoría de sistemas dinámicos, existen diferentes comportamientos de las soluciones de los campos vectoriales asociados a la ecuación (2.1). A continuación se definirán estos comportamientos. Los siguientes definiciones fueron tomados de [26] y [28].

Para estudiar el comportamiento de el sistema dinámico, se tomará en cuenta el siguiente sistema, el cual es un caso particular del sistema dinámico (2.1).

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= cx + dy.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Donde:  $a, b, c, d$  son constantes. Nótese que se puede abreviar el sistema (2.15) representando los coeficientes del sistema mediante la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema lineal puede ser representado de la siguiente manera:

$$X' = AX.\tag{2.16}$$

Nótese que el origen es un punto de equilibrio para el sistema (2.15). Para encontrar otros equilibrios, se tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x' &= ax + by = 0, \\y' &= cx + dy = 0.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Este sistema tiene una solución distinta de cero si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ . Si  $\det(A) = 0$  el sistema puede o no tener soluciones, de hecho puede tener infinitas soluciones, esto se enuncia en el siguiente resultado;

**Proposición 2.1.** *El sistema planar  $X' = AX$  tiene;*

1. *Un único punto de equilibrio  $(0, 0)$  si  $\det(A) \neq 0$ ,*
2. *Una línea recta de puntos de equilibrio si  $\det(A) = 0$  y  $A$  no es la matriz cero.*

Para determinar las soluciones del sistema planar (2.16) se analizan los eigenvalores de la matriz  $A$ . En este caso se define la solución en función de los eigenvalores, y posteriormente se menciona el resultado que relaciona las soluciones con los eigenvalores de la matriz  $A$ .

**Definición 2.14.** *Un vector  $V_0$  es llamado eigenvector de  $A$  si  $AV_0 = \lambda V_0$  para algún  $\lambda$ . La constante  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ .*

**Teorema 2.3.** *Suponga que  $V_0$  es un eigenvector para la matriz  $A$  con el valor asociado  $\lambda$ . Entonces la función  $X(t) = e^{\lambda t}V_0$  es una solución del sistema (2.16).*

*Demostración.* Supóngase que  $V_0$  es un vector para el que tenemos  $AV_0 = \lambda V_0$  donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces se tiene que;

$$\begin{aligned}X' &= \lambda e^{\lambda t}V_0, \\&= e^{\lambda t}(\lambda V_0), \\&= e^{\lambda t}(AV_0), \\&= A(e^{\lambda t}V_0), \\&= AX(t).\end{aligned}\tag{2.18}$$

Entonces  $X(t)$  es solución del sistema (2.16). □

Supóngase que el sistema (2.16) tiene dos eigenvalores  $\lambda_1 < \lambda_2$ , con  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , estos eigenvalores tienen distintos comportamientos, los tres casos a considerar son los siguientes;

1.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , en este caso el comportamiento del punto de equilibrio  $x_0^*$  se dice que es un punto silla,

2.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , en este caso el comportamiento del punto de equilibrio  $x_0^*$  se dice que es un sumidero,
3.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , en este caso el comportamiento del punto de equilibrio  $x_0^*$  se dice que es una fuente.

A continuación se dan ejemplos de cada uno de los tres casos. Cualquier sistema como en (2.16) puede ser analizado de manera similar alrededor de puntos de equilibrio hiperbólicos.

Caso 1. **Punto silla**,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Con estos eigenvalores se dice que las soluciones del sistema (2.16) están asociadas al plano fase de una silla de montar, en este caso el ejemplo es el siguiente;

Considérese el sistema (2.16), donde;

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Este sistema puede ser resuelto de manera inmediata, ya que al representarlo en la matriz se eliminan dos ecuaciones de primer orden. Por lo que el sistema a resolver puede ser reducido como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x, \\ y' &= \lambda_2 y. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Donde la ecuación característica correspondiente esta dada de la siguiente manera;

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

Con  $\lambda_1, \lambda_2$  los eigenvalores correspondientes. El eigenvector correspondiente a  $\lambda_1$  es  $(1, 0)$  y para  $\lambda_2$  es  $(0, 1)$ , tomando en cuenta lo anterior, la solución general está dada por;

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que  $\lambda_1 < 0$ , las soluciones en la línea recta de la forma  $e^{\lambda_1 t}(1, 0)$  se encuentran en el eje  $x$  y tienden a  $(0, 0)$  si  $t \rightarrow \infty$ . Este eje es llamado variedad estable. Y ya que  $\lambda_2 > 0$  las soluciones  $e^{\lambda_2 t}(0, 1)$  se encuentran en el eje  $y$  y se alejan de  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , este eje es llamado variedad inestable. Todas las demás soluciones (con  $\alpha, \beta \neq 0$ ) tienden a infinito en la dirección de la variedad inestable si  $t \rightarrow \infty$  (ver Figura 2.8).

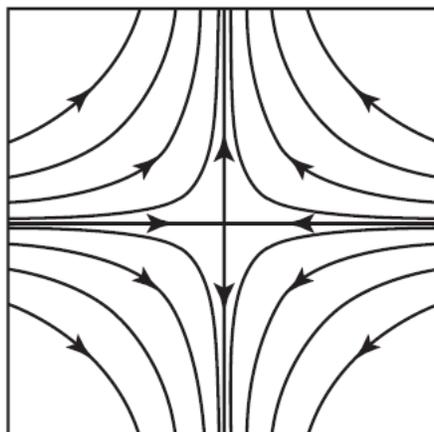


Figura 2.8: Plano fase: silla de montar para  $x' = -x$ ,  $y' = y$ .

Caso 2. **Sumidero**,  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

Para estos eigenvalores el comportamiento del sistema (2.16) se dice que es un sumidero. Para analizar este caso considérese el sistema (2.16) donde;

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Y además  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Las soluciones están dadas de la siguiente manera;

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso a diferencia de la silla de montar, todas las soluciones tienden a  $(0, 0)$  si  $t \rightarrow \infty$ . Ahora la pregunta natural que surge es ¿cuál es el comportamiento de las soluciones cerca del origen? Para responder esto, se calculará la pendiente  $\frac{dy}{dx}$  de una solución con  $\beta \neq 0$ , es decir;

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) &= \beta e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}.$$

Y como  $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$  entonces estas pendientes se aproximan a  $\pm\infty$  (siempre que  $\beta \neq 0$ ). Así estas soluciones tienden al origen tangencialmente al eje  $y$  (ver Figura 2.9).

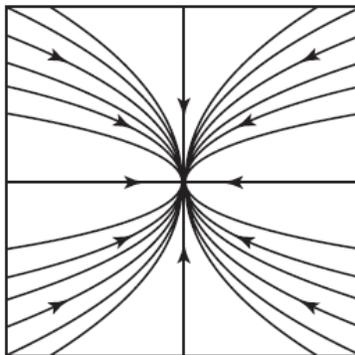


Figura 2.9: Plano fase del tipo sumidero.

Caso 3. **Fuente**,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

Para estos valores el campo vectorial puede ser considerado como una fuente, y es el negativo del ejemplo anterior. Así la solución general y el retrato fase siguen siendo los mismos, excepto que las soluciones tienden a alejarse de  $(0,0)$  sobre las mismas trayectorias (ver Figura 2.10).

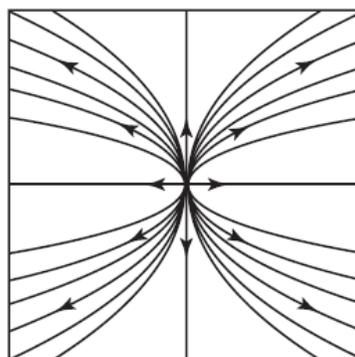


Figura 2.10: Plano fase del tipo fuente.

### 2.0.7. Equivalencia de sistemas dinámicos

#### Definición 2.15. *Equivalencia de sistemas dinámicos*

Un sistema dinámico  $\{T, X, \varphi^t\}$  es llamado topológicamente equivalente al sistema dinámico  $\{T, X, \psi^t\}$ , si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mapeando órbitas del primer sistema al segundo sistema, preservando la dirección del tiempo.

**Observación 2.4.** *Un homeomorfismo es un mapeo invertible en el que el mapeo y su inversa son continuos.*

Considérense dos sistemas dinámicos continuos topológicamente equivalentes de la siguiente manera

$$x' = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.20)$$

$$y' = g(y) \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.21)$$

Supóngase que  $y = h(x)$  es un mapeo invertible  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es suave junto con su inversa ( $h$  es un difeomorfismo), y tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x)), \quad (2.22)$$

donde

$$M(x) = \frac{dh(x)}{dx}.$$

Es la matriz Jacobiada de  $h(x)$  evaluada en el punto  $x$ , entonces el sistema (2.20) es topológicamente equivalente al sistema (2.21). De hecho, el sistema (2.21) se obtiene del sistema (2.20) mediante el cambio suave de coordenadas  $y = h(x)$ . Entonces  $h$  mapea soluciones del sistema (2.20) al sistema (2.21), de la siguiente manera;

$$h(\varphi^t x) = \psi^t h(x),$$

y puede jugar el papel del homeomorfismo en la definición (2.15).

**Definición 2.16.** *Dos sistemas (2.20) y (2.21) que satisfacen la condición (2.22) para algún difeomorfismo  $h$  son llamados suavemente equivalentes (o difeomórficos).*

Supóngase que  $\mu = \mu(x) > 0$  es una función positiva escalar suave, y que los lados derechos de (2.20) y (2.21) están relacionados por

$$f(x) = \mu(x)g(x), \quad (2.23)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces los sistemas (2.20) y (2.21) son topológicamente equivalentes, ya que sus órbitas son idénticas, pero es la velocidad del movimiento lo que las hace diferentes, (la relación de las velocidades en un punto  $x$  es exactamente  $\mu(x)$ ). Por lo tanto, el homeomorfismo  $h$  en la definición (2.15) es el mapeo identidad  $h(x) = x$ , en otras palabras los sistemas se distinguen solo por el tiempo

de parametrización a lo largo de las órbitas.

**Definición 2.17.** *Dos sistemas (2.20) y (2.21), que satisfacen la condición (2.23) para una función positiva suave  $\mu$  se llaman orbitalmente equivalentes.*

Dos sistemas orbitalmente equivalentes pueden no ser difeomórficos, pueden tener ciclos que se ven como la misma curva cerrada en el espacio de fase pero tienen períodos diferentes.

**Definición 2.18.** *Un sistema dinámico  $\{T, X, \varphi^t\}$  es llamado topológicamente equivalente cerca de un equilibrio  $x_0$ , a un sistema dinámico  $\{T, X, \psi^t\}$  cerca de un equilibrio  $y_0$ , si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que cumple con las siguientes condiciones;*

- i)  *$h$  está definido en una pequeña vecindad  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$ ,*
- ii) *se satisface  $y_0 = h(x_0)$ ,*
- iii)  *$h$  mapea órbitas del primer sistema en  $U$  en órbitas del segundo sistema en  $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ , preservando la dirección del tiempo.*

El objetivo principal de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, es demostrar la estabilidad del sistema diferencial, sin calcular la solución analítica de la ecuación diferencial. En las siguientes secciones, se presentan algunos resultados que contribuyen al estudio cualitativo de los sistemas diferenciales no lineales, como en la ecuación (2.1).

### 2.0.8. Estabilidad estructural

Existen sistemas dinámicos cuyo plano fase (en algún dominio) no cambia cualitativamente bajo perturbaciones suficientemente pequeñas, estos sistemas dinámicos reciben un nombre especial. Se denominan estructuralmente estables, antes de revisar este tipo de sistemas dinámicos, se debe tomar en cuenta los siguientes conceptos.

Considérese dos sistemas dinámicos continuos

$$x' = f(x), \tag{2.24}$$

$$y' = g(x). \tag{2.25}$$

Con  $f$  y  $g$  funciones diferenciables.

**Definición 2.19.** La distancia entre el sistema (2.24) y el sistema (2.25) en una región cerrada  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es un número positivo  $d_1$ , dado por:

$$d_1 = \sup \left\{ \left\| f(x) - g(x) \right\| + \left\| \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \right\| \right\}. \quad (2.26)$$

El sistema es  $\epsilon$ -cerrado en  $U$  si  $d_1 \leq \epsilon$ . Aquí  $\| \cdot \|$  significa un vector y una norma matricial en  $\mathbb{R}^n$ , por ejemplo:

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \| A \| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Entonces dos sistemas son cerrados si sus lados derechos en los sistemas (2.24) y (2.25), están cerca uno del otro, junto con sus primeras derivadas parciales. En este caso se le denomina a los sistemas (2.24) y (2.25)  $C^1$ -cerrado.

**Definición 2.20. Estabilidad estructural**

El sistema no lineal (2.24) es estrictamente estructuralmente estable en la región  $U$ , si algún sistema no lineal (2.25) que es lo suficientemente  $C^1$ -cerrado en  $U$ , es topológicamente equivalente en  $U$  al sistema (2.24).

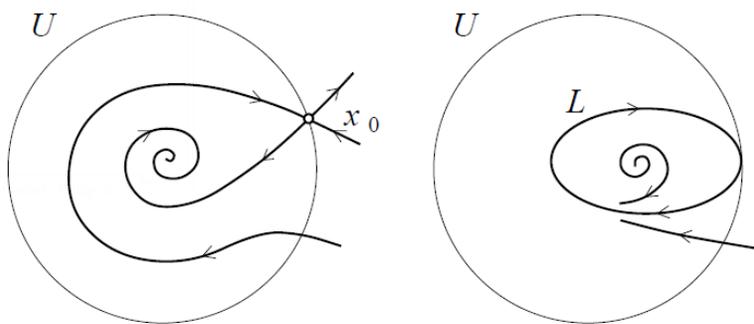


Figura 2.11: Órbitas estructuralmente estables según la definición 2.20.

**Definición 2.21. Estabilidad estructural de Andronov**

Un sistema (2.24) definido en una región  $D \subset \mathbb{R}^n$  es llamado estructuralmente estable en una región  $D_0 \subset D$ , si para cualquier sistema (2.25) suficientemente  $C^1$ -cerrado en  $D$  y hay regiones  $U, V \subset D, D_0 \subset U$ , tal que (2.24) es topológicamente equivalente en  $U$  a (2.25) en  $V$  (ver Figura 2.12).

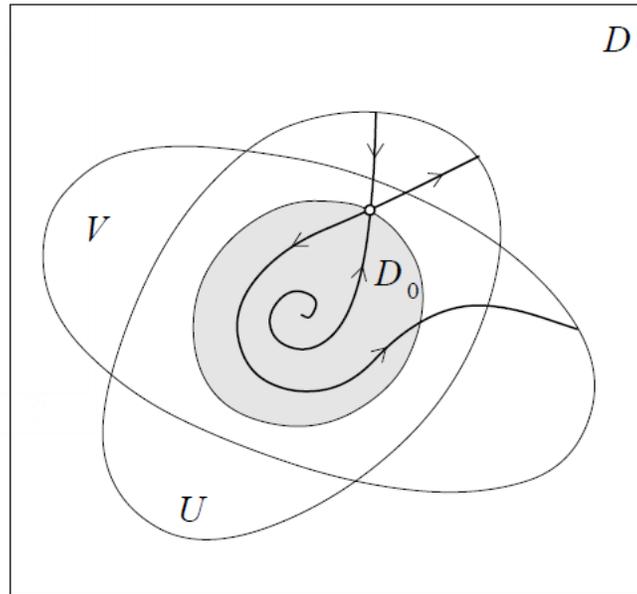


Figura 2.12: Estabilidad estructural de Andronov según la definición 2.21.

**Lema 2.1.** *Si un sistema es estructuralmente estable en una región  $D_0$  con la vecindad  $B_0$  y todas sus órbitas apuntan dentro de  $B_0$ , entonces es estrictamente estructuralmente estable en  $U = D_0$ .*

### 2.0.9. Existencia y unicidad

#### Definición 2.22. (Lipschitz)

Se dice que  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz, si para cada  $x_0 \in \Omega$  existe una constante  $K > 0$  y un abierto  $V \subset \Omega$  que contiene  $x_0$ , tales que:

$$\| F(x) - F(y) \| \leq K \| x - y \|, \forall x, y \in V.$$

Si  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^1$ , (i.e. diferenciable y con derivada continua en  $\Omega$ ), entonces  $F$  es localmente Lipschitz.

La condición de Lipschitz es una condición intermedia, entre la condición de continuidad y la condición de las derivadas parciales, como lo muestra el siguiente lema

**Lema 2.2.** Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces, si  $F \in C^1(\Omega)$ ,  $F$  es localmente Lipschitz.

**Teorema 0.1. (Existencia y unicidad)** (Ver [26],[9]) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  una región abierta,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz,  $x_0 \in \Omega$ , entonces existe  $a > 0$  y una única solución  $x : I = (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema:

$$x' = F(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

De lo anterior se tiene que para todo  $x \in \Omega$ , existe una única solución  $\varphi^t$ , definida en el intervalo  $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ , al variar  $x$  se obtiene la función  $\varphi^t(x) := \varphi(t, x)$ , para  $x \in \Omega$  y  $t \in I_x$ . A continuación se presenta la definición formal de la función  $\varphi^t(x)$ .

**Definición 2.23.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $F \in C^1(\Omega)$  para todo  $x_0 \in \Omega$ , sea  $\varphi(t, x_0)$  la solución de la ecuación diferencial (2.1), definida en un intervalo de existencia  $I_{x_0}$ . Entonces para  $t \in I_{x_0}$ , la aplicación  $\varphi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  definida como

$$\varphi^t(x_0) = \varphi(t, x_0).$$

Esta función es llamada flujo de la ecuación diferencial autónoma (2.1), también a  $\varphi^t$  se le conoce como el flujo del campo vectorial asociado a la ecuación (2.1).

### 2.0.10. Teorema de Poincaré-Bendixson

Como ya fue mencionado, nuestro interés se centrará, en el estudio de la inexistencia de las órbitas periódicas. La mayoría de resultados sólo son válidos en dimensión dos (aunque hay valiosos avances en dimensiones mayores, ver([5], [32]), nuestro análisis se restringe a este contexto. En tal caso la ecuación diferencial autónoma (2.1) se escribe como:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (2.27)$$

Con  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y  $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Un resultado importante dentro de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, es el teorema de Poincaré-Bendixson, dicho resultado clasifica completamente los posibles comportamientos de las soluciones (o órbitas) en un sistema dinámico continuo. En este resultado Poincaré postula que una solución del sistema dinámico continuo, converge ya sea a un punto de equilibrio, o a una órbita, o bien a un número finito de puntos.

Las órbitas se pueden clasificar de dos maneras, órbitas positivas y órbitas negativas. Para comprender la clasificación de las órbitas, considérese las siguientes definiciones tomadas de [38] y [11].

**Definición 2.24. Órbita positiva**

Una órbita positiva del sistema dinámico (2.1), está definida por el siguiente conjunto

$$O^+(x_0) = \{x \in X : x \in \varphi^t(x_0) : \text{para todo } t \geq 0 \text{ } \varphi^t(x_0) \text{ está definido}\}.$$

**Definición 2.25. Órbita negativa**

Una órbita negativa del sistema dinámico (2.1), está definida por el siguiente conjunto

$$O^-(x_0) = \{x \in X : x \in \varphi^t(x_0) : \text{para todo } t < 0 \text{ } \varphi^t(x_0) \text{ está definido}\}.$$

De esta manera una órbita del sistema dinámico (2.1) esta definida en el conjunto

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0) = \{x \in X : x \in \varphi^t(x_0) \text{ para todo } t \in T, \text{ tal que } \varphi^t(x_0) \text{ está definido}\}.$$

Al estudiar la dinámica del sistema dinámico (2.1), hay dos conceptos que son importantes, el punto límite y el conjunto límite.

**Definición 2.26. Punto límite positivo (ver [11])**

Un punto  $p \in X$  es un punto límite positivo (negativo), del flujo  $\varphi^t(x_0)$  del sistema dinámico (2.1) si existe una sucesión monótona  $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$  de números positivos (negativos), donde  $t_n \rightarrow \infty$  ( $-\infty$ ) cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi^{t_n}(x_0) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Dos conjuntos importantes para el estudio de órbitas periódicas, son el  $\alpha$ -límite y el  $\omega$ -límite, se puede decir que son los lugares geométricos donde nace o muere la órbita de un sistema dinámico.

**Definición 2.27. Conjunto límite positivo**

Se llama conjunto límite positivo  $\omega(x_0)$  del flujo  $\varphi^t(x_0)$  de la órbita  $O(x_0)$  del sistema dinámico (2.1), al conjunto de todos los puntos límite positivos  $\varphi^t(x_0)$  donde  $t \geq 0$ .

A este conjunto comúnmente se le llama conjunto  $\omega$ -límite.

**Definición 2.28. Conjunto límite negativo**

Se llama conjunto límite negativo  $\alpha(x_0)$  del flujo  $\varphi^t(x_0)$  de la órbita  $O(x_0)$  del sistema dinámico (2.1), al conjunto de todos los puntos límite negativo  $\varphi^t(x_0)$  donde  $t < 0$ .

A este conjunto comúnmente se le llama conjunto  $\alpha$ -límite.

A continuación se establece la relación entre las órbitas periódicas y los conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite.

De manera intuitiva se tiene que si una órbita  $O(x)$  de un punto  $x$  no es acotada la órbita se aleja al infinito, en caso contrario existen dos posibilidades el conjunto límite  $\omega(O)$  es una órbita periódica o el conjunto límite  $\omega(O)$  consta de un número finito de puntos críticos, y  $O$  tiende a una de ellas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Antes de revisar el teorema de Poincaré-Bendixson, se definirán algunos resultados previos para analizar la demostración del teorema. Estos resultados son los siguientes:

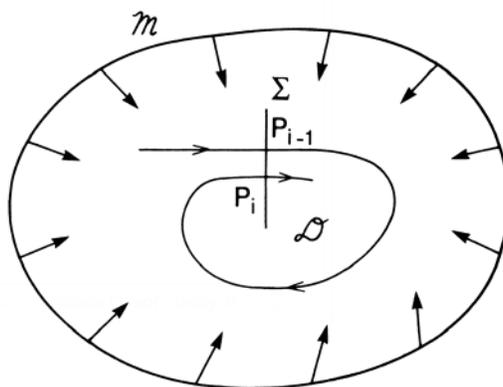
**Definición 2.29.** Sea  $\Sigma$  un arco continuo conexo en  $P$ , entonces se dice que  $\Sigma$  es transversal al campo vectorial en  $P$ , si  $\mathbf{n} \cdot P$  no es cero y no cambia de signo en  $\Sigma$  (donde  $\mathbf{n}$  es la normal en cada punto de  $\Sigma$ , y  $(\cdot)$  denota el producto punto vectorial). O equivalentemente dado que el campo vectorial es  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , el campo vectorial no tiene puntos fijos en  $\Sigma$  y nunca es tangente a  $\Sigma$ .

De aquí en adelante se considerará a  $\mu$  como el conjunto compacto invariante en  $P$ , para algún  $p \in P$ . También se denotará por  $O_+(p)$ , a la órbita bajo el flujo  $\phi_t(\cdot)$  para tiempos positivos, (también llamada la semiórbita positiva de  $p$ ).

**Lema 2.3.** Sea  $\Sigma \subset \mu$  un arco transversal al campo vectorial, la órbita positiva a través de cualquier punto  $p \in \mu$ ,  $O_+(p)$  intersecta  $\Sigma$  en una secuencia monótona, es decir, si  $p_i$  es la  $i$ -ésima intersección de  $O_+(p)$  con  $\Sigma$ , entonces  $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$ .

*Demostración.* Considérese el pedazo de órbita  $O_+(p)$  de  $p_{i-1}$  a  $p_i$  junto con el segmento  $[p_{i-1}, p_i] \subset \Sigma$  (ver la Figura 2.13), (nota: claro que si  $O_+(p)$  intersecta a  $\Sigma$  sólo una vez entonces se habrá terminado). Esto forma el límite de una región invariante positiva  $D$ , por consiguiente  $O_+(p_i) \subset D$ , y por lo tanto se debe tener  $p_{i+1}$  (si existiera) contenido en  $D$ , por lo tanto se demuestra que  $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$ .

□

Figura 2.13: Arco transversal  $\Sigma$  al campo vectorial.

**Corolario 2.1.** *El conjunto  $\omega$ -límite interseca a  $\Sigma$  en a lo más un punto.*

*Demostración.* Se procederá por contradicción, si supóngase que  $\omega(p)$  interseca  $\Sigma$  en dos puntos  $q_1$  y  $q_2$ , entonces por definición del conjunto  $\omega$ -límite se puede encontrar una sucesión de puntos a lo largo de  $O_+(p)$ ,  $\{p_n\}$  y  $\{\bar{p}_n\}$  los cuales intersecan  $\Sigma$  tales que  $p_n \rightarrow q_1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y  $\bar{p}_n \rightarrow q_2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , sin embargo, si esto fuera cierto esto contradice el lema (2.3) en la monotonicidad de intersecciones de  $O_+(p)$  con  $\Sigma$ .  $\square$

**Lema 2.4.** *Si  $\omega(p)$  no contiene puntos fijos, entonces  $\omega(p)$  es una órbita cerrada.*

*Demostración.* La estrategia a seguir es elegir un punto  $q \in \omega(p)$ , y mostrar que la órbita de  $q$  es cerrada, y entonces se muestra que  $\omega(p)$  es lo mismo que la órbita de  $q$ .

Sea  $x \in \omega(p)$ ; entonces  $x$  no es un punto fijo ya que  $\omega(p)$  es cerrado y es una unión de órbitas que no contienen puntos fijos. Construyendo un arco transversal al campo vectorial en  $x$  (se denotará el arco por  $\Sigma$ ). Ahora  $O_+(p)$  interseca  $\Sigma$  una sucesión monótona,  $\{q_n\}$ , con  $q_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , pero ya que  $x \in \omega(q)$  la órbita de  $q$  debe ser cerrada.

Sólo resta mostrar que la órbita de  $q$  y  $\omega(p)$  son lo mismo, tomando un arco transversal,  $\Sigma$ , a  $q$ , entonces por el corolario (2.1)  $\omega(p)$  interseca  $\Sigma$  únicamente en  $q$ , ya que  $\omega(p)$  es la unión de dos órbitas, no contiene puntos fijos y está conectado, entonces  $O(q) = \omega(p)$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos puntos fijos distintos del campo vectorial contenido en  $\omega(p)$ ,  $p \in \mu$ . Entonces existe a lo más una órbita  $\gamma \subset \omega(p)$ , tal que  $\alpha(\gamma) = p_1$  y  $\omega(\gamma) = p_2$  (Nota: se denotará por  $\alpha(\gamma)$  al conjunto  $\alpha$ -límite de todo punto  $\gamma$ , similarmente para  $\omega(\gamma)$ ).*

*Demostración.* Se procederá por reducción a lo absurdo, supóngase que existen dos órbitas  $\gamma_1, \gamma_2 \in \omega(p)$ , tales que

$$\alpha(\gamma_i) = p_i, \quad \omega(\gamma_i) = p_2, \quad i = 1, 2.$$

Tomando los puntos  $q_1 \in \gamma_1$  y  $q_2 \in \gamma_2$  y construyendo los arcos  $\Sigma_1, \Sigma_2$  transversales al campo vectorial en cada de estos puntos (ver Figura 2.14).

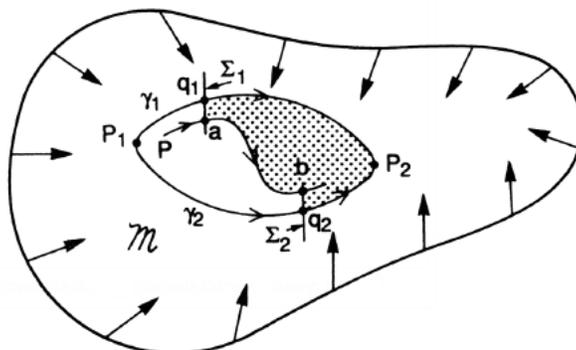


Figura 2.14: Dos puntos fijos  $p_1$  y  $p_2$  del campo vectorial contenido en  $\omega(p)$ .

Ya que  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$ ,  $O_+(p)$  intersecta  $\Sigma_1$  en un punto  $a$ , y luego intersecta a  $\Sigma_2$  en un punto  $b$ , ya que la región delimitada por los segmentos y arcos de la órbita conectan los puntos  $q_1, a, b, p_2$  es una región positivamente invariante, pero lleva a una contradicción ya que  $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$ .  $\square$

**Teorema 2.4. Poincaré-Bendixson** Sea  $\mu$  una región positivamente invariante para el campo vectorial que contiene un número finito de puntos fijos. Sea  $p \in \mu$ , y considérese  $\omega(p)$ . Entonces se cumple una de las siguientes posibilidades

- I)  $\omega(p)$  es un punto fijo;
- II)  $\omega(p)$  es una órbita cerrada;
- III)  $\omega(p)$  consiste de un número finito de puntos  $p_1 \dots p_n$  y órbitas  $\gamma$  con  $\alpha(\gamma) = p_j$ .

*Demostración.* Si  $\omega(p)$  contiene sólo puntos fijos, entonces debe de consistir de un único punto fijo, ya que el número de puntos fijos en  $\mu$  es finito y  $\omega(p)$  es un conjunto conexo.

Si  $\omega(p)$  no contiene puntos fijos, entonces, según el lema (2.4) debe ser una órbita cerrada. Supóngase que  $\omega(p)$  contiene puntos fijos y puntos no fijos (a veces llamados puntos regulares). Sea  $\gamma$  una trayectoria en  $\omega(p)$  consistente de puntos regulares. Entonces  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$  deben ser puntos fijos ya

que si no fuera por el lema (2.4),  $\omega(\gamma)$  y  $\alpha(\gamma)$  serían órbitas cerradas, que es absurdo ya que  $\omega(p)$  es conectado y contiene puntos fijos. Así se ha demostrado que cada punto regular en  $\omega(p)$  tiene un punto fijo para los conjuntos límite  $\omega$  y  $\alpha$ . Esto prueba el inciso **iii)** y completa la prueba del teorema.  $\square$

A pesar de que hay valiosos aportes para el estudio de órbitas periódicas, en la actualidad no hay un resultado que indique el número de órbitas que existen dado un campo vectorial. Este problema es un problema abierto. Existen criterios negativos para el análisis de ciclos límites, uno de los más usados es el criterio de Bendixson-Dulac. A continuación se presentan algunos criterios afirmativos y negativos para la existencia de órbitas periódicas.

## Capítulo 3

# Criterios para la existencia y no existencia de órbitas periódicas

En esta sección se presentan y se analizan diversos criterios, para estudiar la existencia y la inexistencia de órbitas periódicas en sistemas dinámicos continuos, uno de los criterios más importantes para el análisis de las órbitas periódicas es el propuesto por H. Poincaré. A continuación se revisa la teoría a utilizar para posteriormente revisar este criterio.

### 3.1. Existencia

#### 3.1.1. Mapeo de Poincaré

Posiblemente la herramienta más elemental para estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas es el mapeo de Poincaré (propuesto por H. Poincaré en 1881). La propuesta de Poincaré fue la siguiente, si  $\Gamma$  es una órbita periódica de la ecuación (2.1) a través del punto  $x_0$  y  $\Sigma$  es un hiperplano perpendicular a  $x_0$ , entonces para todo punto  $x \in \Sigma$  suficientemente cerca de  $x_0$ , la solución de (2.1) a través de  $x$  en  $t = 0$ ,  $\sigma_t(x)$ , cruzará  $\Sigma$  nuevamente en un punto  $P(x)$  cerca de  $x_0$  (ver Figura 3.1). El mapeo  $x \rightarrow P(x)$  es llamado el mapeo de Poincaré. El mapeo de Poincaré está definido cuando  $\Sigma$  es una superficie suave, a través de un punto  $x_0 \in \Gamma$ , que no es tangente a  $\Gamma$  en  $x_0$ . En este caso se dice que la superficie  $\Sigma$  interseca la curva  $\Gamma$  transversalmente en  $x_0$ . El siguiente teorema establece la existencia y continuidad del mapeo de Poincaré  $P(x)$  y de su primera derivada  $DP(x)$ .

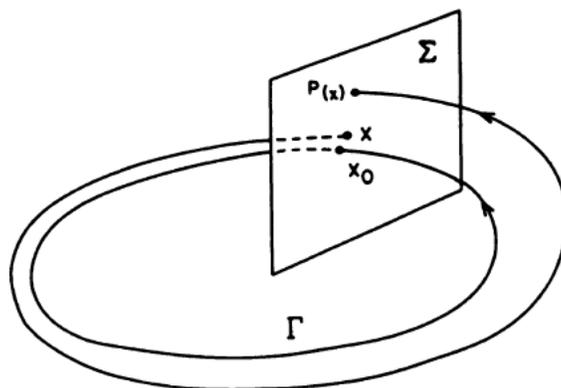


Figura 3.1: Mapeo de Poincaré.

**Teorema 3.1.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $F \in C^1(E)$ . Supóngase que  $\phi_t(x_0)$  es una solución periódica del sistema (2.1) de periodo  $T$  tal que el ciclo

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\},$$

está contenido en  $E$ . Sea  $\Sigma$  el hiperplano ortogonal a  $\Gamma$  en  $x_0$ , es decir, sea

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot F(x_0) = 0\}.$$

Entonces existe  $\delta > 0$  y una única función  $\tau(x)$ , definida y continuamente diferenciable para  $x \in N_\delta(x_0)$ , tal que  $\tau(x_0) = T$ , y además

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma.$$

*Demostración.* La prueba de este teorema es una aplicación inmediata del teorema de la función implícita. Para algún punto  $x_0 \in \Gamma \subset E$ , defínase la función

$$F(t, x) = [\sigma_t(x) - x_0] \cdot F(x_0).$$

Luego se sigue del teorema de la función implícita [ver apéndice A.1], que  $F \in C^1(\mathbb{R} \times E)$  y se sigue de la periodicidad de  $\sigma_t(x_0)$  que  $F(T, x_0) = 0$ .

Además, dado que  $\sigma(t, x_0) = \sigma_t(x_0)$  es una solución del sistema (2.1) que satisface  $\sigma(T, x_0) = x_0$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(T, x_0)}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma(T, x_0)}{\partial t} \cdot F(x_0) \\ &= F(x_0) \cdot F(x_0) = |F(x_0)| \cdot F(x_0) = |F(x_0)|^2 \neq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

dado que  $x_0 \in \Gamma$  no es un punto de equilibrio del sistema (2.1), por el teorema de la función implícita existe un  $\delta > 0$  y una única función  $\tau(x)$  definida y continuamente diferenciable para todo  $x \in N_\delta(x_0)$  tal que  $\tau(x) = T$  y tal que

$$F(\tau(x), x) = 0,$$

para todo  $x \in N_\delta(x_0)$ . Entonces, para todo  $x \in N_\delta(x_0)$ ,  $[\sigma(\tau(x), x) - x_0] \cdot F(x_0) = 0$ , es decir

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma.$$

□

**Definición 3.1.** Sean  $\sigma, \delta, \Sigma$  y  $\tau$  definidos como en el teorema (3.1). Entonces para  $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ , la función

$$P(x) = \sigma_{\tau(x)}(x),$$

es llamada el mapeo de Poincaré para  $\Gamma$  en  $x_0$ .

**Observación 3.1.** Se sigue del teorema (3.1) que  $P \in C^1(U)$  donde  $U = N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ . La prueba es la misma que la del teorema (3.1). Usando el teorema de la función implícita para funciones analíticas, implica que si  $F$  es analítica en  $E$  entonces  $P$  es analítica en  $U$ . Puntos fijos del mapeo de Poincaré, es decir, puntos  $x \in \Sigma$  que satisfacen  $P(x) = x$ , corresponden a órbitas periódicas del sistema (2.1) alrededor del punto  $x$ . Y no hay pérdida de generalidad al asumir que el punto ha sido trasladado al punto  $x_0 \in \Sigma$  en ese caso  $x_0 = 0$ ,  $\Sigma \simeq \mathbb{R}^{n-1} \cap N_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  y  $Dp(0)$  es representado por una matriz  $(n-1) \times (n-1)$ . Al considerar el sistema (2.1) con  $t \rightarrow -t$ , se puede mostrar que el mapeo de Poincaré  $P$  tiene inversa de clase  $C^1$ ,  $P^{-1}(x) = \sigma_{-\tau(x)}(x)$ . Entonces  $P$  es un difeomorfismo, es decir, es una función suave con inversa suave.

En los sistemas diferenciales como el propuesto en la ecuación (2.1) si se traslada el origen al punto  $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$ , la línea normal  $\Sigma$  será una línea a través del origen (como en la Figura 3.2). El punto  $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$  divide a  $\Sigma$  en dos segmentos abiertos  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  donde  $\Sigma^+$  se encuentra completamente en el exterior de  $\Gamma$ . Sea  $s$  la distancia señalada a lo largo de  $\Sigma$  con  $s > 0$  para puntos en  $\Sigma^+$  y  $s < 0$  para puntos en  $\Sigma^-$ .

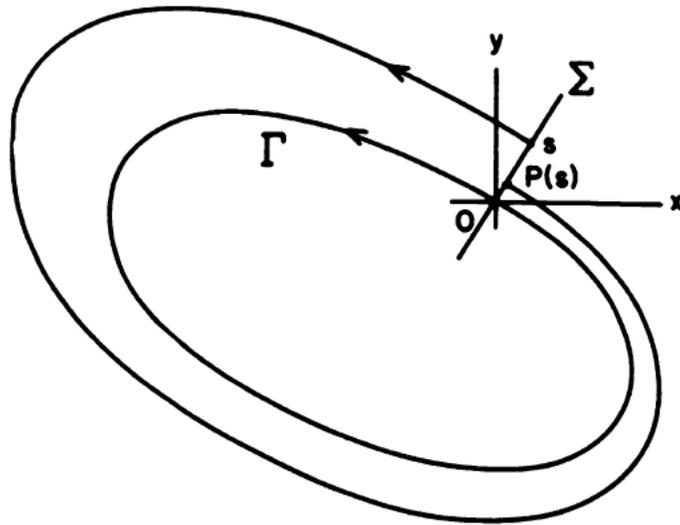


Figura 3.2: Línea recta  $\Sigma$  normal a  $\Gamma$  en 0.

De acuerdo con el teorema (3.1), el mapeo de Poincaré  $P(s)$  está definido para  $|s| < \delta$  y se tiene  $P(0) = 0$ . Para ver como la estabilidad del ciclo  $\Gamma$  está determinada por  $P'(0) = 0$ . A continuación se introducirá la función de desplazamiento

$$d(s) = P(s) - s.$$

Entonces  $d(0) = 0$  y  $d'(s) = P'(s) - 1$ ; para los valores de  $|s| < \delta$  por el teorema del valor medio se tiene que

$$d(s) = d'(\sigma)s,$$

para algún  $\sigma$  entre 0 y  $s$ . Dado que  $d'(s)$  es continua, el signo de  $d'(s)$  será del mismo signo de  $d'(0)$  para  $|s|$  suficientemente pequeño siempre y cuando  $d'(0) \neq 0$ . Entonces si  $d'(0) < 0$  se sigue que  $d(s) < 0$  para  $s > 0$  y que  $d(s) > 0$  para  $s < 0$ , es decir el ciclo  $\Gamma$  es ciclo límite estable o un ciclo  $\omega$ -límite (ver Figura 3.2). Similarmente, si  $d'(0) > 0$  entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite o un ciclo  $\alpha$ -límite. Se tienen los resultados correspondientes si  $P(0) = 0$  y  $P'(0) < 1$ , entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite estable, y si  $P(0) = 0$  y  $P'(0) > 1$ , entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite inestable. Entonces la estabilidad de  $\Gamma$  esta determinada por la derivada del mapeo de Poincaré. En este sentido el siguiente teorema da una fórmula para  $P'(0)$  en términos del lado derecho  $F(x)$  del sistema (2.1).

**Ejemplo 3.1.** *Mostrar que el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\y' &= x + y(1 - x^2 - y^2),\end{aligned}\tag{3.2}$$

*tiene un ciclo límite representado por  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ .*

**Solución**

*El mapeo de Poincaré para  $\Gamma$  se puede encontrar al resolver el sistema (3.2) escrito en coordenadas polares:*

$$\begin{aligned}r' &= r(1 - r^2), \\ \theta' &= 1.\end{aligned}\tag{3.3}$$

*Con  $r(0) = r_0$  y  $\theta(0) = \theta_0$ . La primera ecuación puede ser resuelta mediante el método de variables separables o la ecuación de Bernulli. La solución es de la siguiente forma;*

$$r(t, r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2 - 1} \right) e^{-2t} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

y

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

*Si  $\Sigma$  es el rayo  $\theta = \theta_0$  a través del origen, entonces  $\Sigma$  es perpendicular a  $\Gamma$  y la trayectoria a través del punto  $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$  en  $t = 0$  intersecta el rayo  $\theta = \theta_0$  de nuevo en  $t = 2\pi$ , (ver Figura 3.3), se sigue que el mapeo de Poincaré está dado por*

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2 - 1} \right) e^{-4\pi} \right].$$

*Claramente  $P'(1) = 1$  corresponde al ciclo  $\Gamma$  y se puede observar que*

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2 - 1} \right) e^{-4\pi} \right]^{-\frac{3}{2}},$$

*y que  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ .*

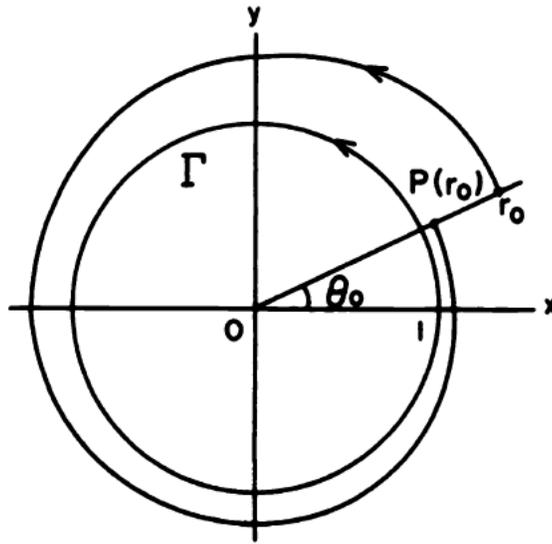


Figura 3.3: Mapeo de Poincaré para el sistema del ejemplo 3.2.

**Teorema 3.2.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y suponga que  $F \in C^1(E)$ . Sea  $\gamma(t)$  una solución del sistema (2.1) de período  $T$ . Entonces la derivada de el mapeo de Poincaré  $P(s)$  a lo largo de una línea recta  $\Sigma$  normal a  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$  en  $x = 0$ , es dado por la siguiente expresión:

$$P'(0) = e^{\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt}.$$

**Corolario 3.1.** Bajo las hipótesis del teorema (3.2), la solución periódica  $\gamma(t)$  es un ciclo límite estable si se cumple que;

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt < 0.$$

Y es un ciclo límite inestable si se cumple que;

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt > 0.$$

O puede ser un ciclo límite semiestable o puede pertenecer a una banda continua de ciclos si el valor de la integral es cero.

En el ejemplo (3.2) analizado anteriormente, se tiene:  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ ,  $\nabla \cdot F(x, y) = 2 - 4x^2 - 4y^2$  y

$$\int_0^{2\pi} \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4\cos^2(t) - 4\sin^2(t)) dt = 4\pi.$$

Entonces,  $s = r - 1$ , por el teorema (3.2) se tiene:

$$P'(0) = e^{-4\pi}.$$

Lo que concuerda con lo encontrado en el ejemplo anterior por cálculo directo. Ya que  $P'(0) < 1$ , el ciclo  $\gamma(t)$  el cual es un ciclo límite estable en este ejemplo.

**Definición 3.2.** Sea  $P(s)$  el mapeo de Poincaré para el ciclo  $\Gamma$  del sistema analítico planar (2.1), y sea

$$d(s) = P(s) - s,$$

la función de desplazamiento. Entonces si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{k-1}(0) = 0 \quad \text{y} \quad d^k(0) \neq 0,$$

$\Gamma$  es llamado un ciclo límite de multiplicidad  $k$ . Si  $k = 1$  entonces  $\Gamma$  es llamado un ciclo límite, simple.

Nótese que:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \gamma(t), 0 \leq t \leq T\},$$

es un ciclo límite del sistema (2.1) si

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt \neq 0.$$

Se puede demostrar que si  $k$  es par entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite semiestable y si  $k$  es impar entonces  $\Gamma$  es un ciclo límite estable si  $d^k(0) < 0$ , y  $\Gamma$  es un ciclo límite inestable si  $d^k(0) > 0$ .

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixson ([26],[9],[14],[4],[27]).

**Teorema 3.3.** Un conjunto cerrado, acotado y no vacío  $K \subset \mathbb{R}^2$ , que es positivamente (negativamente) invariante por el flujo  $\sigma_t$  de (2.27) contiene una órbita periódica o un punto crítico.

Para ilustrar su uso, se estudiarán los siguientes casos:

**Ejemplo 3.2.** *Considérese el siguiente sistema;*

$$\begin{aligned}x_1' &= (1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 - x_2, \\x_2' &= x_1 + (1 - x_1^2 - x_2^2)x_2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

*Para aplicar el resultado anterior, el sistema (3.4) se transformará en coordenadas polares, tomando:  $x_1 := r\cos(\theta)$ ,  $x_2 := r\sin(\theta)$  con  $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ . Recuérdese que se cumple que:  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ; derivando con respecto a  $t$ , por la regla de la cadena se obtiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned}rr' &= x_1x_1' + x_2x_2', \\ \theta' &= \frac{W(x_1, x_2)}{r^2}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Donde  $W(x_1, x_2)$  es el wronskiano de (3.4). i.e.

$$W(x_1, x_2) := \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix} = x_1x_2' - x_2x_1'.$$

sustituyendo  $x_1, x_2, x_1'$  y  $x_2'$  de la ecuación en (3.5), se obtiene:

$$\begin{cases} r' = (1 - r^2)r, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Integrando la segunda ecuación se obtiene:  $\theta(t) = t + \theta_0$ , es decir, no hay otro punto crítico diferente del origen. De la primera ecuación del sistema anterior se tiene que  $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$  es un conjunto negativamente invariante y sin puntos críticos; así, del Teorema de Poincaré-Bendixson la región  $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$  contiene una órbita periódica.

### 3.1.2. Estabilidad lineal de órbitas periódicas

Ahora, si, se considera el sistema dinámico como en el caso general dado por la ecuación (2.1), la pregunta natural que surge es: ¿cómo se puede saber si la órbita es estable o no?, o equivalentemente, preguntar ¿si el correspondiente punto fijo del mapeo de Poincaré es estable?. Sea  $v_0$  una perturbación infinitesimal tal que  $x^* + v_0$  está en  $\Sigma$ . Entonces luego del primer retorno a  $\Sigma$ , se tiene:

$$\begin{aligned} x^* + v_1 &= P(x^* + v_0) \\ &= P(x^*) + [DP(x^*)] v_0 + \mathcal{O} [\| v_0 \|^2], \end{aligned}$$

donde  $D(P(x^*))$  es una matriz de tamaño  $(n - 1) * (n - 1)$  y es llamada linealización del mapeo de Poincaré en  $x^*$ . Ya que  $x^* = P(x^*)$ , tenemos

$$v_1 = [DP(x^*)] v_0.$$

El criterio de estabilidad deseado es determinado en termino de los eigenvalores  $\lambda_j$  de  $D(P(x^*))$  : las órbitas cerradas son linealmente estables si y sólo si  $|\lambda_j| < 1$  para todo  $j = 1, \dots, n - 1$ .

Para entender este criterio, considérese el caso genérico donde no se pueden reemplazar los eigenvalores. Entonces hay una base de eigenvectores  $\{e_j\}$  y entonces se tiene que;

$$v_0 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j e_j.$$

Para algunos escalares  $v_j$ . Entonces

$$v_1 = (D(p(x^*))) \sum_{j=1}^{n-1} v_j e_j = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j e_j.$$

Iterando el mapeo linealizado  $k$  – veces se obtiene

$$v_k = \sum_{j=1}^{n-1} v_j (\lambda_j)^k e_j.$$

Por lo tanto, si para toda  $\lambda_j < 1$ , entonces  $\| v_k \| \rightarrow 0$  geométricamente rápido, esto prueba que  $x^*$  es linealmente estable, a la inversa. Si  $\lambda_j > 1$  para alguna  $j$ , entonces las perturbaciones a lo largo de  $e_j$  crecen, así  $x^*$  es inestable. Un caso límite ocurre cuando el mayor eigenvalor tiene magnitud  $\lambda_m = 1$ .

Los  $\lambda_j$  son llamados características o multiplicadores de Floquet de la órbita periódica. Estrictamente hablando, estos son múltiplos no triviales. Aunque siempre hay un multiplicador trivial adicional  $\lambda \equiv 1$ , correspondiente a perturbaciones a lo largo de la órbita periódica, se descartan tales perturbaciones ya que solo equivalen a tiempo de traslación.

## 3.2. No existencia

### 3.2.1. Criterio de Bendixson

Recuérdese que el objetivo de este trabajo es el estudio de la inexistencia de órbitas periódicas, para ello se definirá un resultado que a lo largo de este trabajo va a ser utilizado, para probar algunos resultados posteriores.

**Teorema 1. (Criterio de Bendixson)**(ver [4])

Sea  $F = (f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tal que la divergencia de  $F$ ,  $\text{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero, y no cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

no tiene órbitas periódicas en  $D$ .

*Demostración.* Supóngase que el sistema tiene una órbita periódica  $\gamma$  con periodo  $T > 0$  en  $D$ , entonces por el teorema de Green [ver apéndice B.1] se tiene:

$$\begin{aligned} \int \int_{\text{int}(\gamma)} \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 &= \int_{\gamma} f_1 dx_2 - f_2 dx_1, \\ &= \int_0^T (f_1 x_2' - f_2 x_1') dt, \\ &= \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $\text{int}(\gamma)$ , entonces se sigue de la continuidad de  $\nabla \cdot f$  en  $\text{int}(\gamma)$ , que la integral doble anterior es positiva o negativa. En cualquier caso esto conduce a una contradicción, por lo tanto no hay una órbita periódica que se encuentre completamente en  $D$ .

□

**Ejemplo 3.3.** *Considérese el siguiente sistema;*

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = (1 + x_1^2)x_2. \end{cases}$$

*Calculamos la divergencia de este sistema*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial[(1 + x_1^2)x_2]}{\partial x_2} = 1 + x_1^2 > 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

*Por el criterio de Bendixson el sistema no tiene órbitas periódicas.*

A pesar de que el criterio de Bendixson es muy utilizado en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, en algunos casos el criterio no es suficiente para descartar la existencia de órbitas periódicas, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.4.** *Determinar si el siguiente sistema tiene órbitas periódicas:*

$$\begin{cases} x_1' = (x_2 - 2)x_1^2, \\ x_2' = ax_1 + 4x_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

*Calculamos la divergencia de este sistema*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_2 - 2)x_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial(ax_1 + 4x_2)}{\partial x_2} = (x_2 - 2)2x_1 + 4 = 2x_1x_2 - 4x_1 + 4.$$

En este caso el criterio de Bendixson no se puede aplicar, una generalización a este criterio es el criterio de Dulac, que en algunas referencias se conoce como el criterio de Bendixson-Dulac.

### 3.2.2. Criterio de Bendixson-Dulac

**Teorema 2. ( Criterio de Bendixson-Dulac)**

*Sean  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$ ,  $h(x_1, x_2)$  funciones con primera derivada parcial continua en un dominio simplemente conexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ , tales que  $\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero, y no cambia de signo en  $D$ , entonces el sistema*

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no tiene órbitas periódicas en  $D$ . A la función  $h(x_1, x_2)$  que cumple con la anterior propiedad, se le denomina función de Dulac.

Obsérvese que si la función  $h(x_1, x_2) = 1$ , entonces se tiene en el caso del teorema (1) anterior .

**Ejemplo 3.5.** *Considérese el siguiente sistema;*

$$\begin{cases} x_1' = (x_2 - 2)x_1^2, \\ x_2' = ax_1 + 4x_2, \end{cases}$$

y considérese  $h(x_1, x_2) = x_1^{-2}$ , entonces

$$\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_2 - 2)x_1^2x_1^{-2}}{\partial x_1} + \frac{\partial(ax_1 + 4x_2)x_1^{-2}}{\partial x_2} = 0 + 4x_1^{-2}, \forall x_1 \neq 0,$$

por lo tanto, puesto que el resultado no es idénticamente cero y no cambia de signo, por el criterio de Bendixson-Dulac el sistema no tiene órbitas periódicas.

Usualmente se propone la función  $h(x_1, x_2)$  en la forma  $1, x_1^s x_2^r, e^{(s_1+rx_2)}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$  o algunas combinaciones de ellas. Cabe mencionar que encontrar dicha función en ocasiones no es tan inmediato.

**Ejemplo 3.6.** *Considérese el siguiente sistema;*

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 - x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

Observese que el criterio de Bendixson no aplica. Sea  $h(x_1, x_2) = e^{-2x_1}$ , entonces

$$\frac{\partial(f_1h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2h)}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_2e^{-2x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(-x_1 - x_2 + x_2^2)e^{-2x_1}}{\partial x_2} = e^{-2x_1} < 0,$$

así el sistema no tiene órbitas periódicas en el plano.

Una variante del teorema de Bendixson-Dulac es el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.** Sea  $U_0 \subset U$  un conjunto abierto anular (i.e. homeomorfo a un anillo del plano), supóngase que existe una función con derivadas parciales continuas  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que la divergencia  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  no es idénticamente cero, ni cambia de signo en  $U_0$ . Entonces el sistema tiene a lo más una órbita periódica enteramente contenida en  $U_0$ .

*Demostración.* Nótese que si hubiera una órbita periódica, esta debiera contener en su interior a la frontera interior de  $U_0$ , pues, de no ser el caso se tendría una contradicción con el teorema de Bendixson-Dulac. Ahora, supóngase que existen 2 órbitas periódicas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , por la observación anterior se supondrá que  $\gamma_1$  está contenida en el interior de  $\gamma_2$ , y el resto de la prueba se sigue en forma similar al Teorema de Bendixson-Dulac, pues al integrar sobre la frontera a  $(-hf_2, hf_1)$  se obtiene cero, pero por el teorema de Green esto coincide con la integral  $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$  sobre la región limitada por las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , lo cual es diferente de cero. Esta contradicción prueba que no puede haber dos órbitas periódicas; por lo tanto, a lo más hay una.  $\square$

Dado un punto  $x \in \Omega$ , si se supone que la solución del sistema (2.1) está definida para todo tiempo, entonces su órbita positiva(negativa) se define como:  $\{\sigma_t(x)\}_{t \geq 0}$ ,  $\{\sigma_t(x)\}_{t \leq 0}$ .

Se dice que un conjunto  $D$  en el plano es positivamente( negativamente) invariante por el flujo  $\sigma_t$  del sistema (2.27), si  $\sigma_t \in D, \forall x \in D, \forall t \geq 0(\forall t \leq 0)$ .

### 3.2.3. Sistemas gradiente

Existen familias de ecuaciones diferenciales para las que es posible probar resultados relativos a la existencia o no existencia de órbitas periódicas, las cuales, a pesar de su particularidad, son importantes en aplicaciones o para fines teóricos. Por ejemplo, los sistemas gradientes.

**Definición 3.3.** Sistema Gradiente

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto, un sistema gradiente es una ecuación de la forma

$$x' = -\text{grad}v(x).$$

Donde  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$  y  $\text{grad}v(x) = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$ .

**Definición 3.4.** Sea  $y := (y_1, y_2) : I \rightarrow U$  una función diferenciable y  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$Dv(y) = \left( \frac{\partial v}{\partial y_1} y_1', \frac{\partial v}{\partial y_2} y_2' \right),$$

es la derivada de  $v$  a lo largo de  $y$ .

**Proposición 3.1.** Un sistema gradiente  $x' = -\text{grad}v(x)$  no posee órbitas periódicas.

*Demostración.* Ver([23], pág. 31)

□

Note que es posible definir sistemas gradientes en  $\mathbb{R}^n$  y la proposición anterior sigue siendo válida.

### 3.3. Criterios particulares y otros criterios

#### 3.3.1. El problema 16H

El problema de decidir la existencia de órbitas periódicas es en la actualidad una área muy activa y vigorosa. Muestra de ello es el famoso problema 16 de Hilbert. Para revisarlo, se considerará que una órbita periódica para un sistema plano, es aislada (también llamado ciclo límite), si existe una región alrededor de la órbita que no contiene otras órbitas periódicas.

Por ejemplo, las órbitas periódicas del siguiente sistema;

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1. \end{aligned}$$

no son aisladas.

El problema 16 de Hilbert (la segunda parte) pregunta sobre el número de órbitas aisladas que puede tener un sistema polinomial, es decir, una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= p_1(x_1, x_2), \\ x_2' &= p_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

con  $p_1$  y  $p_2$  polinomios en dos variables del mismo grado. Esta pregunta sigue sin tener respuesta, aún en el caso de que el grado de los polinomios es 2. Sin embargo, este problema ha propiciado un desarrollo profundo y abundante de varias áreas de las matemáticas contemporáneas. Para saber más de este tema, (ver [40]).

La determinación de las órbitas periódicas en los sistemas dinámicos como en la ecuación (2.1) es un problema aún sin respuesta, sin embargo en los últimos años se han desarrollado algunos resultados que bajo ciertas condiciones ayudan a determinar si hay o no órbitas periódicas en campos vectoriales. Así, se presentarán algunos resultados propuestos en [25].

De aquí en adelante se considera el sistema sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas como el que muestra a continuación.

$$x' = F(x),$$

donde  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ ,  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , y  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \in \Omega$ . Se usará la notación para la divergencia propuesta en [23]. Los siguientes resultados son una ligera generalización de lo anterior.

**Teorema 3.4.** *Si existe  $c : \Omega_1 \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h$  es una solución del sistema*

$$f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} = h(c(x_1, x_2) - \text{div}(F)), \quad (3.7)$$

donde  $ch$  es continua, con signo constante y no idénticamente zero en alguna subregión de  $\Omega$ , entonces  $h$  es una función de Dulac para el sistema (2.27) en  $\Omega$ .

**Observación 3.2.** *Suponiendo una función de Dulac de la forma  $h = h(z)$  donde  $z(x_1, x_2)$ , entonces aplicando la regla de la cadena la ecuación (3.7) se convierte en:*

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{dh}{dz} = h(c(x_1, x_2) - \text{div}(F)). \quad (3.8)$$

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente resultado:

**Proposición 3.2.** *Sea  $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones  $C^1$  para  $i = 1, 2$  y  $g_2$  es decreciente, entonces el sistema plano*

$$\begin{aligned}x_1' &= ax_1g_1(x_1) - bg_2(x_1)x_2, \\x_2' &= dg_2(x_1)x_2 - ek(x_1)x_2,\end{aligned}\tag{3.9}$$

admite una función de Dulac en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

*Demostración.* Calculando el negativo de la divergencia del sistema (3.9) se tiene:

$$-div(F) = -ag_1(x_1) - ax_1g_1'(x_1) + bg_2'(x_1)x_2 - dg_2(x_1) + ek(x_1),$$

dado que  $g_2$  es decreciente entonces

$$c = g_2(x_1) \left( \frac{ax_1g_1(x_1)}{g_2(x_1)} \right)' > 0,$$

así  $c - div(F) = bg_2'(x_1)x_2 - dg_2(x_1) + ek(x_1) - ax_1g_1(x_1)\frac{g_2'(x_1)}{g_2(x_1)}$ . Considerando  $z = g_2(x_1)x_2$ , entonces la ecuación (3.8) se convierte en

$$\frac{d \log h}{dz} = -\frac{1}{z},$$

por lo tanto por el Teorema (3.4) el sistema admite una función de Dulac.

□

**Teorema 3.5.** Sea  $g_i, k_i$  funciones  $C^1$ . Supóngase que  $k_i(x_1, x_2)$  son crecientes (decrecientes) como función de  $x_i$  (para todo  $x_j, i \neq j$  fijo),  $g_i(x_1, x_2)$  son decrecientes (crecientes) como función de  $x_i$ , y al menos una de estas es estrictamente monótona, entonces el sistema planar

$$\begin{aligned}x_1' &= r_1x_1 + k_1(x_1, x_2)x_1 - g_1(x_1, x_2)x_1, \\x_2' &= r_2x_2 + k_2(x_1, x_2)x_2 - g_2(x_1, x_2)x_2,\end{aligned}\tag{3.10}$$

admite una función de Dulac en  $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ .

*Demostración.* Calculando el negativo de la divergencia del sistema (3.10) se tiene que

$$-div(F) = -r_1 - k_1 - \frac{\partial k_1}{\partial x_1}x_1 + g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}x_1 - r_2 - k_2 - \frac{\partial k_2}{\partial x_2}x_2 + g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}x_2.$$

Propóngase a la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente forma  $c(x_1, x_2) := \frac{\partial k_1}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial k_2}{\partial x_2} x_2 - \frac{\partial g_2}{\partial x_2} x_2$ , por hipótesis se tiene que  $c > 0$  o  $c < 0$ , por lo que la ecuación (3.8) se convierte en

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{d \log h}{dz} = -r_1 - k_1 + g_1 - r_2 - k_2 + g_2.$$

Así la solución es  $h(z) = \frac{1}{x_1 x_2}$ , que es una función de Dulac para el sistema (3.10).

□

Se han propuesto algunos resultados para la determinación de órbitas periódicas. A continuación se revisaran algunos resultados sobre lo propuesto en [21], [23] y [24].

Sea  $C^0(\Omega, \mathbb{R})$  el conjunto de las funciones continuas definidas en el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F}_\Omega = \{f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) : f \text{ no cambia de signo y tiene sus ceros en un conjunto de medida cero}\},$$

También para la región simplemente conectada  $\Omega$ , defínanse los conjuntos

$$\mathcal{D}_\Omega^+ = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k = \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \geq 0, k \in \mathcal{F}_\Omega\},$$

y

$$\mathcal{D}_\Omega^- = \{h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : k = \frac{\partial(hf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(hf_2)}{\partial x_2} \leq 0, k \in \mathcal{F}_\Omega\}.$$

Una función de Dulac para el sistema (2.1) es un elemento en el conjunto:

$$\mathcal{D}_\Omega(F) := \mathcal{D}_\Omega^+ \cup \mathcal{D}_\Omega^-.$$

**Teorema 3.6.** *Si existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que  $\Phi$  es una solución del sistema*

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi(c(x_1, x_2 - \text{div}(F))), \quad (3.11)$$

con  $\Phi \in \mathcal{F}_\Omega$  entonces  $\Phi$  es una función de Dulac para el sistema (2.1) en  $\Omega$ .

El siguiente resultado es uno de los dos resultados principales publicados en [22], en el cual se plantea lo siguiente

**Teorema 3.7.** Sea  $\Omega$  una región simplemente conexa en un conjunto abierto, supóngase un campo vectorial de la siguiente forma:

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Si existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que cualquiera de las siguientes condiciones se cumple, entonces  $\mathcal{D}_\Omega(F) \neq \emptyset$ .

- a) La función  $\gamma := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 g_2 g_1' - f_2 g_1 g_2'}$  depende de  $z := g_1(x_1)g_2(x_2)$  y son continuas;
- b) La función  $\eta := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 g_1 + f_2 g_2}$  depende de  $z := k_1(x_1) + k_2(x_2)$  (con  $k_i'(x_i) = g_i(x_i)$ , para  $i = 1, 2$ ), y son continuas;
- c) La función  $\sigma := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}}$  depende de  $z := z(x_1, x_2)$  y son continuas.

*Demostración.* Considérese el caso el inciso **a)**, la demostración para los otros casos es análoga. Se debe encontrar una función de Dulac usando la ecuación (3.11) asociada al campo vectorial .

Primero supóngase que  $\gamma$  depende únicamente de  $z := g_1(x_1)g_2(x_2)$ . Entonces la ecuación (3.11) se reduce a

$$f_1(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2)g_1'(x_1) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + f_2(x_1, x_2)g_1(x_1)g_2'(x_2) \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \gamma(z)(c(x_1, x_2) - \text{div}(F)).$$

Reescribiendo queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial \log(\gamma)}{\partial z} = \frac{(c(x_1, x_2) - \text{div}(F))}{f_1(x_1, x_2)g_2g_1'(x_1) + f_2g_1(x_1)g_2'(x_2)} = \exp\left(\int^z \gamma(s)ds\right). \quad (3.12)$$

La función (3.12) es de hecho una función de Dulac. □

El siguiente resultado es consecuencia del teorema anterior, pero contiene algunos casos particulares

**Corolario 3.3.** Bajo las hipótesis del teorema( 3.7), si existe  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  tal que alguna de las siguientes condiciones se cumple, entonces  $D_\Omega(F) \neq \emptyset$  :

- a) La función  $\alpha_i := \frac{c - \text{div}(F)}{f_i}$  depende de  $x_i$ , para alguna  $i \in [1, 2]$  y son continuas;
- b) La función  $\beta := \frac{c - \text{div}(F)}{x_2 f_1 + x_1 f_2}$  depende de  $z := x_1 x_2$  y son continuas;
- c) La función  $\delta := \frac{c - \text{div}(F)}{f_1 + f_2}$  depende de  $z := x_1 + x_2$  y son continuas;
- d) Lan función  $\epsilon := \frac{c - \text{div}(F)}{c_1 f_1 + c_2 f_2}$  depende de  $z := c_1 x_1 + c_2 x_2$  y son continuas;

e) La función  $\frac{x_2[c(x_1, x_2) - \text{div}(F)]}{f_1(x_1, x_2) - \frac{x_1}{x_2}f_2(x_1, x_2)}$  depende de  $z := \frac{x_1}{x_2}$  y son continuas;

**Ejemplo 3.7.** Considérese el siguiente modelo epidemiológico SIS con muerte inducida

$$\begin{aligned} x_1' &= \Lambda - \mu x_1 - \beta x_1 x_2, \\ x_2' &= \beta(x_1 - x_2)x_2 - (\alpha + \mu + \delta)x_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Con parámetros positivos, considérese nuevamente el espacio  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ . Denótese por  $F = (f_1, f_2)$  el campo vectorial asociado a la ecuación (3.13), calculando el negativo de la divergencia se tiene;

$$-\text{div}(F) = \mu + \beta x_2 - \beta x_1 + 2\beta x_2 + (\alpha + \mu + \delta).$$

Tomando  $c(x_1, x_2) := -(\mu + 2\beta x_2)$  y realizando las siguientes operaciones;

$$\alpha_2 := \frac{c - \text{div}(F)}{f_2} = \frac{-\beta x_1 + \beta x_2 + (\alpha + \mu + \delta)}{(x_2)[\beta x_1 - \beta x_2 - (\alpha + \mu + \delta)]} = -\frac{1}{x_2}.$$

Por lo tanto por el inciso **a)** del corolario (3.3) se obtiene que  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+^2}(F) \neq \emptyset$ .

En trabajos recientes se ha propuesto un método para encontrar funciones de Dulac para ciertos modelos biológicos, pero para encontrar estas funciones se necesita cierta madurez, pero aún con las técnicas propuestas se sigue careciendo de una caracterización y un criterio general para encontrar dichas funciones de Dulac. A continuación se presentan algunos resultados propuestos en [19] para modelos biológicos.

Si existe una función  $c$  de tal manera que se cumple alguno de los casos del corolario (3.3), los pasos a seguir para construir una función de Dulac son los siguientes:

**Paso 1.** Calcule la divergencia del sistema  $\text{div}(f_1, f_2)$ . Si  $\text{div}(f_1, f_2)$  no cambia de signo en  $\Omega$ , pase al siguiente paso.

**Paso 2.** Elijase una función especial del teorema (3.7) o el corolario (3.3) y elijase la apropiada  $c(x_1, x_2)$ .

**Paso 3.** Finalmente, calcule la integral (3.12).

A continuación se muestran algunos ejemplos donde se construyen funciones de Dulac para algunos modelos de la biología (ver [19]).

**Ejemplo 3.8.** Modelos de enfermedades infecciosas con recaída y tasa de incidencia bilineal  $\lambda x_1 x_2$ .

Los fenómenos de recaída en algunas enfermedades infecciosas se caracterizan por el estado activo de los individuos que se han infectado previamente, y su posterior reactivación o recaída al estado infeccioso, por ejemplo el virus del Herpes. Supóngase entonces que se quiere analizar la dinámica de fenómeno epidemiológico, para lo cual se plantea el siguiente modelo;

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \mu - \lambda x_1 x_2 - \mu x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda x_1 x_2 - \mu x_2 - \sigma x_2 + \nu x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \sigma x_2 - \mu x_3 - \nu x_3.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Los parámetros son constantes positivas. No hay muerte relacionada con la enfermedad, la tasa de muerte natural se supone igual que la tasa de natalidad, denotada por  $\mu$ . Así que la población será constante, así  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , el parámetro  $\lambda$  es el coeficiente de transmisión de la enfermedad. El parámetro  $\sigma$  la tasa a la que los individuos infectados  $x_2$  llegan a ser individuos infectados inactivos  $x_3$ . Y  $\nu$  denota la tasa que la persona inactiva infectada  $x_2$  se revierten al estado infeccioso. Sea

$$\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_+^3\} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

Para construir una función de Dulac se reducirá el sistema (4.5), sujeto a las restricción  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ . Usando  $x_3 = 1 - x_1 - x_2$  se elimina la variable  $x_3$  de las ecuaciones. Así, bajo las restricciones anteriores se tiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \mu - \lambda x_1 x_2 - \mu x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda x_1 x_2 - (\mu + \sigma)x_2 + \nu(1 - x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

$x_1, x_2$  en el conjunto  $\Omega_{12}$ , donde;

$$\Omega_{12} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

**Proposición 3.3.** El multiplicador

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}.$$

Es una función de Dulac del sistema (3.15) en el interior de  $\Omega_{12}$ .

*Demostración.* Denótese el lado izquierdo de cada uno de los elementos del sistema (3.15) por  $f_1(x_1, x_2)$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  respectivamente.

Calculando el negativo de la divergencia  $-div(f_1, f_2)$  se tiene que;

$$-div(f_1, f_2) = \lambda x_2 + \mu - \lambda x_1 + (\mu + \sigma) + \nu.$$

Se verificará si se cumplen las condiciones del corolario (3.3). Para ello defínase la función  $c(x_1, x_2)$  como:  $c(x_1, x_2) = -(\lambda x_2 + \mu + \nu + \nu(\frac{1-x_1-x_2}{x_2})) < 0$  en el interior de  $\Omega_{12}$ , entonces

$$\alpha_2 := \frac{c - div(f_1, f_2)}{f_2} = \frac{-\lambda x_1 + (\mu + \sigma) - \nu \left( \frac{1-x_1-x_2}{x_2} \right)}{x_2 \left[ \lambda x_1 - (\mu + \sigma) + \nu \left( \frac{1-x_1-x_2}{x_2} \right) \right]} = -\frac{1}{x_2}.$$

Calculando la integral simple se tiene que  $\Phi(x_1, x_2) = exp(\int^z \alpha(s) ds) = \frac{1}{x_2}$ . Por lo que se tiene el resultado deseado.  $\square$

Es conocido que una función de Dulac para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no es única. A continuación se muestra una segunda función de Dulac para el sistema (3.15).

**Proposición 3.4.** *El multiplicador*

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

Es una función de Dulac del sistema (3.15) en el interior de  $\Omega_{12}$ .

*Demostración.* Usando la hipótesis **b)** del corolario (3.3) y sea

$$c(x_1, x_2) = -\left( \frac{\mu}{x_1} + \nu + \nu \left( \frac{1-x_1-x_2}{x_2} \right) \right) < 0,$$

en el interior de  $\Omega_{12}$ . Entonces

$$\beta = \frac{c - div(f_1, f_2)}{x_2 f_1 + x_1 f_2} = \frac{\frac{-\mu}{x_1} + \lambda x_2 + \mu - \lambda x_1 + (\mu + \sigma) - \nu \left( \frac{1-x_1-x_2}{x_2} \right)}{x_1 x_2 \left[ \left( \frac{\mu}{x_1} - \lambda x_2 - \mu \right) + \left( \lambda x_1 - (\mu + \sigma) + \nu \frac{1-x_1-x_2}{x_2} \right) \right]} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

Por lo tanto el sistema admite una función de Dulac  $\Phi_2(x_1, x_2) = x_1^{-1}x_2^{-1}$ . □

**Ejemplo 3.9.** *Modelo de sistemas presa-depredador (Leslie-Grower).* Leslie [16] introduce el siguiente modelo presa-depredador, que se caracteriza por tener un término de crecimiento de la población del tipo logístico. Además Leslie considera la capacidad de carga del medio ambiente de los depredadores, en función de la cantidad de presas disponibles expresada por  $K_2(x_1)$ . El modelo a analizar es el siguiente;

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 r_1(x_1, K_1) - g(x_1)h(x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 x_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{K_2(x_1)} \right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Donde  $x_1$  y  $x_2$  denotan las densidades de las poblaciones de presas y depredadores al tiempo  $t$  respectivamente. Considérese el cuadrante  $x_1 - x_2$ . El término  $g(x_1)h(x_2)$  describe a la capacidad de carga. Esta respuesta funcional incluye la interferencia entre los depredadores. La función  $g(x_1)$  satisface las siguientes hipótesis;  $g(0) > 0$  y  $g'(x_1) > 0$  para todo  $x_1 > 0$ . Similarmente,  $h(0) = 0$  y  $h'(x_2) > 0$  para todo  $x_2 > 0$ .

La función  $r_1(x_1, K_1)$  representa la tasa de crecimiento específico en ausencia del depredador y  $r_1(0, K_1) > 0$ , y además satisface la siguiente hipótesis  $(x_1 - K_1)r_1(x_1, K_1) < 0$  para  $x_1 \neq K_1$ .

A continuación se construye una función de Dulac para el modelo de Leslie-Grower (3.16) considerando  $g(x_1) = x_1$ .

**Proposición 3.5.** *Suponga que  $g(x_1) = x_1$ . si  $r'(x_1, K_1) < 0$ , entonces el multiplicador*

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}.$$

*Es una función de Dulac para el sistema (3.16) en el interior del primer cuadrante del plano.*

*Demostración.* Calculando el negativo de la divergencia se tiene que

$$-div(f_1, f_2) = -r_1(x_1, K_1) - x_1 r'(x_1, K_1) + h(x_2) - r_2 + \frac{2r_2 x_2}{K_2(x_1)}.$$

Se verificará si las condiciones ii) del corolario (3.3) se satisfacen. Para ello sea

$$c(x_1, x_2) = x_1 r'(x_1, K_1) - \frac{r_2 x_2}{K_2(x_1)}$$

Entonces

$$\beta = \frac{c - \text{div}(f_1, f_2)}{x_2 f_1 + x_1 f_2} = \frac{-r_1(x_1, k_1) + h(x_2) - r_2 + \frac{r_2 x_2}{K_2(x_1)}}{x_1 x_2 \left[ r_1(x_1, K_1) - h(x_2) + r_2 - \frac{r_2 x_2}{K_2(x_1)} \right]} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

Por lo tanto el sistema admite una función de Dulac. □

En este trabajo también se propone una función más general, cumpliendo con cierta forma, por ejemplo que la función sea monótona decreciente, para ilustrar esto usan la siguiente proposición.

**Proposición 3.6.** Si

$$g(x_1) \left( \frac{x_1 r_1(x_1, K_1)}{g(x_1)} \right)' - r_2 < 0. \quad (3.17)$$

Entonces el multiplicador

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{g(x_1) x_2^2}.$$

Es una función de Dulac para el sistema (3.16).

*Demostración.* Recuérdese que el negativo de la divergencia del sistema (3.16) está dado de la siguiente manera;

$$-\text{div}(f_1, f_2) = -r_1(x_1, K_1) - x_1 r_1'(x_1, K_1) + g'(x_1) h(x_2) - r_2 + 2r_2 \frac{x_2}{K_2(x_1)}.$$

Sea la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} c(x_1, x_2) &= g(x_1) \left( \frac{x_1 r_1(x_1, K_1)}{g(x_1)} \right) - r_2 \\ &= r_1(x_1, K_1) + x_1 r_1'(x_1, K_1) - x_1 r_1(x_1, k_1) \frac{g'(x_1)}{g(x_1)} - r_2 < 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{c - \text{div}(f_1, f_2)}{f_1 g'(x_1) x_2^2 + 2f_2 g(x_1) x_2} \\ &= \frac{-x_1 r_1(x_1, K_1) \frac{g'(x_1)}{g(x_1)} + g'(x_1) h(x_2) - 2r_2 + 2r_2 \frac{x_2}{K_2}}{g(x_1) x_2^2 \left[ x_1 r_1(x_1, K_1) \frac{g'(x_1)}{g(x_1)} - g'(x_1) h(x_2) + 2r_2 - 2r_2 \frac{x_2}{K_2(x_1)} \right]}, \\ &= -\frac{1}{g(x_1) x_2^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el inciso **a)** del teorema (3.7), el sistema admite una función de Dulac, así  $\Phi_2(x_1, x_2) = (g(x_1))^{-1}x_2^{-2}$  es una función de Dulac para el sistema (3.16).  $\square$

Si bien, en los ejemplos anteriores se construyeron funciones de Dulac, para los sistemas dados por los ejemplos, el problema de construir una función de Dulac pasa por el problema de proponer una función  $c(x_1, x_2)$  que permita una simplificación de las expresiones de tal manera que la solución de ecuación diferencial parcial (3.11), sea una función de Dulac. Es decir, el problema de construir una función de Dulac es trasladado a el problema de encontrar una función  $c(x_1, x_2)$ . Esta es la razón por la que en este trabajo, se da un método para construir a la función auxiliar  $c(x_1, x_2)$ , que permitirá la construcción de funciones de Dulac para algunos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## Capítulo 4

# Resultados

En esta sección se propone un método para construir las funciones de Dulac para algunos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas como el que se muestra a continuación.

$$x' = F(x),$$

donde  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ ,  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , y  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \in \Omega$ .

De aquí en adelante se considera el siguiente campo vectorial

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

Donde  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \in \Omega$ , y  $\Omega$  es un conjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Considerando lo anterior, se presenta el siguiente resultado propuesto en [19].

Si existe una función  $c \in \mathcal{F}_\Omega$  de tal manera que  $\Phi$  es una solución del sistema

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi(c(x_1, x_2) - \text{div}(F)). \quad (4.1)$$

Con  $\Phi \in \mathcal{F}_\Omega$ , entonces  $\Phi$  es una función de Dulac para (2.1) en  $\Omega$ .

Obsérvese que encontrar una función de Dulac para el sistema dinámico (2.1) depende principalmente de encontrar una función  $c(x_1, x_2)$  que permita resolver la ecuación diferencial (4.1), cuya solución es una función de Dulac. Por esta razón este método de construcción y determinación de la función de Dulac es un trabajo difícil de realizar. Debido a lo anterior, se propone el siguiente método para la construcción de la función de Dulac del sistema (2.1).

## 4.1. Método propuesto para la construcción de funciones de Dulac

En esta sección se presenta un método para descartar la existencia de órbitas periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^2$ . Recuérdese que con la teoría definida en los capítulos anteriores, si a un sistema dinámico como en (2.1) se le puede construir la función de Dulac, este sistema no admite órbitas periódicas. Considerando esto, el método que se propone es el siguiente:

### Método para construir la función de Dulac

1. Considérese el sistema dinámico  $x' = F(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ , donde:  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ , y  $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \in \Omega$ .
2. Calcular el negativo de la divergencia del sistema y denotarla por  $-div(f_1, f_2)$ .
3. Encontrar una factorización de  $-div(f_1, f_2)$  (si la hay) en función de  $f_1$  y  $f_2$ , como las propuestas en [19].
4. Si en el proceso de factorizar  $-div(f_1, f_2)$ , faltan términos para obtener la factorización adecuada, los términos faltantes deben agregarse a la función  $c(x_1, x_2)$  (con signo contrario).
5. El resto de términos en  $-div(f_1, f_2)$  que no pudieron factorizarse se deben agregar a la función  $c(x_1, x_2)$  (con signo contrario).
6. Resolver la ecuación diferencial propuesta en (3.6), con la función  $c(x_1, x_2)$  obtenida anteriormente, el resultado de este paso debe de ser una función de Dulac.

A continuación se presentan algunos modelos, donde mediante el método anterior se pudo construir la función de Dulac, a cada modelo analizado.

## 4.2. Ejemplos analizados con el método propuesto

**Ejemplo 4.1.** En [13] se analiza el siguiente modelo tipo Lotka-Volterra, el cual presenta una dinámica compleja, en la dinámica se observan hasta 7 puntos fijos, en este sentido es una tarea complicada dar una descripción de la dinámica de este, sin embargo con los resultados propuestos se demuestra que no existen órbitas periódicas asociadas al modelo. El modelo analizado es el siguiente;

$$\begin{aligned} x_1' &= r_1 x_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1} + \left( \frac{b_1 x_2 - x_2^2}{1 + c_1 x_2^2} \right) \frac{x_2}{k_1} \right], \\ x_2' &= r_2 x_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2} + \left( \frac{b_2 x_1 - x_1^2}{1 + c_2 x_1^2} \right) \frac{x_1}{k_2} \right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde  $x_1, x_2$  son densidades de poblaciones y  $k_1, k_2$  son capacidades de carga.

A continuación se verificará que el método propuesto funciona, para ello calculamos el negativo de la divergencia del sistema (4.2)

$$-div(f_1, f_2) = -r_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1} + \left( \frac{b_1 x_2 - x_2^2}{1 + c_1 x_2^2} \right) \frac{x_2}{k_1} \right] + \frac{r_1 x_1}{k_1} - r_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2} + \left( \frac{b_2 x_1 - x_1}{1 + c_2 x_1^2} \right) \frac{x_1}{k_2} \right] + \frac{r_2 x_2}{k_2}.$$

El negativo de la divergencia la podemos factorizar, mediante los siguientes pasos;

$$\begin{aligned} -div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} \left( x_1 r_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1} + \left( \frac{b_1 x_2 - x_2^2}{1 + c_1 x_2^2} \right) \frac{x_2}{k_1} \right] \right) - \frac{1}{x_2} \left( x_2 r_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2} + \left( \frac{b_2 x_1 - x_1}{1 + c_2 x_1^2} \right) \frac{x_1}{k_2} \right] \right) \\ &\quad + \frac{r_1 x_1}{k_1} + \frac{r_2 x_2}{k_2}, \\ &= -\frac{1}{x_1} f_1 - \frac{1}{x_2} f_2 + \frac{r_1 x_1}{k_1} + \frac{r_2 x_2}{k_2}, \\ &= -\left[ \frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2} \right] + \frac{r_1 x_1}{k_1} + \frac{r_2 x_2}{k_2}. \end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_1)$  de la siguiente forma;

$$c(x_1, x_2) = -\frac{r_1 x_1}{k_1} - \frac{r_2 x_2}{k_2} < 0.$$

Aplicando el teorema (3.6), se tiene que resolver la ecuación (3.11), defínase la función  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - div F).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - div F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{\left[ f_1 x_2 + f_2 x_1 \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto:

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.2).

A continuación se presenta el retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.2) (ver Figura 4.1), los parámetros utilizados para obtener el retrato fase son:  $r_1 = 1, k_1 = 1, b_1 = 5, c_1 = 0.5, r_2 = 1, k_2 = 1, b_2 = 5, c_2 = 0.5$ . Todos los retratos fase mostrados a partir de aquí, fueron realizados con el programa RStudio (ver [31]) utilizando el paquete PhaseR (ver [15]).

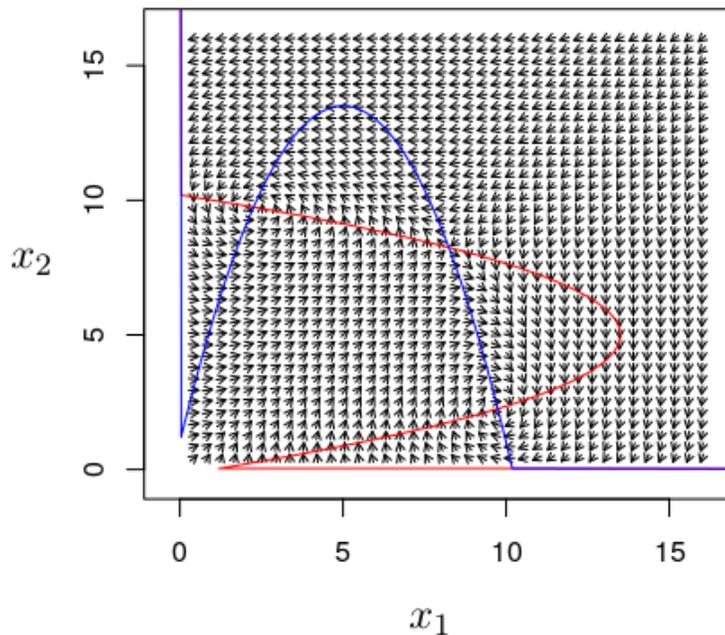


Figura 4.1: Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.2).

**Ejemplo 4.2.** *Considérese que interesa analizar la dinámica de una enfermedad infecciosa, por ejemplo el virus del herpes, este tipo de enfermedades se caracteriza por la posible recaída a la enfermedad, de individuos que previamente fueron infectados, en este tipo de modelos, supone que la población es dividida en tres partes, individuos susceptibles que no han sido expuestos al virus, individuos infectados*

con la enfermedad e individuos previamente afectados con el virus que aún no se recuperan totalmente de la enfermedad, son infectados inactivos, considérese el modelo analizado en [19]

$$\begin{aligned}x_1' &= \mu - g(x_1)x_2 - \mu x_1, \\x_2' &= g(x_1)x_2 - (\mu + \delta)x_2 + \nu(1 - x_1 - x_2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Considérese el plano  $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ .

El parámetro  $\mu$  es la tasa de natalidad y mortalidad y se suponen iguales, el parámetro  $\lambda$  es el coeficiente de trasmisión de la enfermedad,  $\sigma$  es la tasa de las personas infectadas  $x_2$  que se convierten en individuos infectados inactivos  $x_3$ , y  $\nu$  denota la velocidad con la que los individuos infectados quiescentes  $x_2$  vuelven al estado infeccioso, bajo las hipótesis del teorema (4.1) el modelo (4.3) no tiene órbitas periódicas en el plano  $\Omega_1$ .

A continuación se verificará que el método propuesto funciona, para ello calculamos el negativo de la divergencia del sistema (4.3)

$$-div(f_1, f_2) = g'(x_1)x_2 + \mu - g(x_1) + (\mu + \delta) + \nu.$$

El negativo de la divergencia la podemos factorizar, mediante los siguientes pasos;

$$-div(f_1, f_2) = -\frac{1}{x_2} [g(x_1)x_2 - (\mu + \delta)x_2 - \nu x_2] + g'(x_1)x_2 + \mu.$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente forma;

$$c(x_1, x_2) = -\left[ g'(x_1) + \mu + \frac{\nu(1 - x_1)}{x_2} \right].$$

Aplicando el teorema (3.6), se tiene que resolver la ecuación (3.11), defínase la función  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - div(F)).$$

Así que

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{(c - div F)}{\left[ f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{f_2}{x_2}}{[\frac{f_2}{x_2}]} = -\frac{1}{x_2},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto:

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.3).

A continuación se presenta el retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.3) (ver Figura 4.2), los parámetros utilizados para obtener el retrato fase son:  $\mu = 1, \delta = 1, \nu = 5, g(x_1) = x_1^2$ .

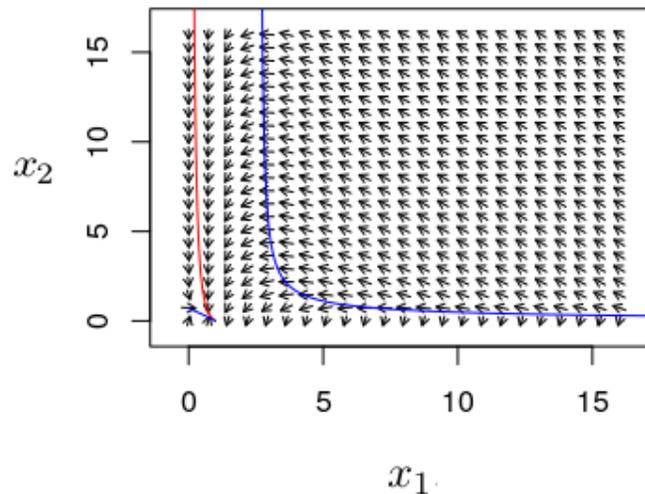


Figura 4.2: Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.3).

**Ejemplo 4.3.** Se quiere estudiar la dinámica del siguiente modelo de fitoplankton-zoplankton. Para ello considérense dos especies, denotadas por  $x_1$  y  $x_2$ , las cuales comparten el mismo sitio, por lo que pueden existir interacciones entre las especies tales como competencia interespecífica, intraespecífica, depredación o mutualismo.

Considérese el modelo fitoplancton-zooplancton analizado en [30].

$$\begin{aligned}x_1' &= rx_1 \left[1 - \frac{x_1}{k}\right] - \alpha x_2 x_1, \\x_2' &= \beta x_1 x_2 - cx_2 - \frac{\theta x_1}{\gamma + x_1} x_2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Donde  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseco,  $k$  es la capacidad de carga del fitoplancton,  $\alpha$  es la tasa de depredación específica,  $\beta$  representa el radio de biomasa consumida por el zooplancton para la producción de nuevo zooplancton.  $c$  es la tasa de muerte de zooplancton,  $\theta$  es la tasa de reproducción de toxina por especie de fitoplancton y  $\gamma$  es la constante de saturación media.

A continuación se verificará que el método propuesto funciona, para ello calculamos el negativo de la divergencia del sistema (4.4)

$$-div(f_1, f_2) = -r \left[1 - \frac{x_1}{k}\right] + \frac{rx_1}{k} + \alpha x_2 - \beta x_1 + c + \frac{\theta x_1}{\gamma + x_1}.$$

El negativo de la divergencia la podemos factorizar, mediante los siguientes pasos;

$$\begin{aligned}-div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} \left( rx_1 \left[1 - \frac{x_1}{k}\right] - \alpha x_2 x_1 \right) + \frac{rx_1}{k} - \frac{1}{x_2} \left( \beta x_1 x_2 - cx_2 - \frac{\theta x_1}{\gamma + x_1} x_2 \right) \\&= -\frac{1}{x_1} f_1 - \frac{1}{x_2} f_2 + \frac{rx_1}{k}.\end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  como;

$$c(x_1, x_2) = -\frac{rx_1}{k}$$

Aplicando el teorema (3.6), se tiene que resolver la ecuación (3.11), y suponemos que  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - div(F)).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - div(F))}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{\left[ f_1 x_2 + f_2 x_1 \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema(4.4).

A continuación se presenta el retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.4) (ver Figura 4.3), los parámetros utilizados para obtener el retrato fase son:  $r = 0.2, k = 0.1, a = 0.5, \beta = 0.5, c = 0.3, \theta = 0.4, \gamma = 0.5$ .

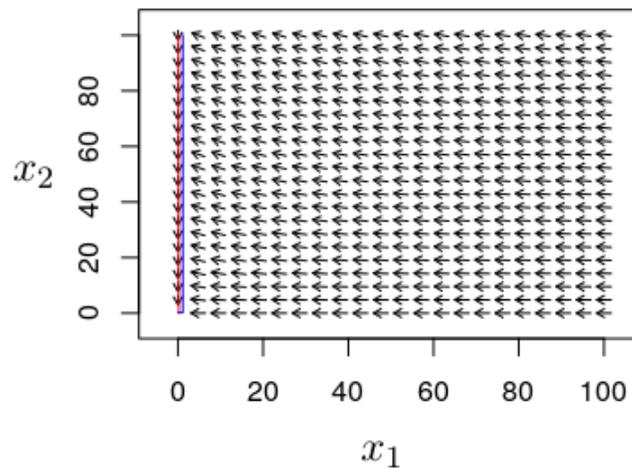


Figura 4.3: Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.4).

En la ecología de poblaciones es fundamental descartar la existencia de órbitas periódicas, por lo que en la siguiente sección se mostrarán resultados obtenidos cuando el método propuesto es aplicado a modelos de interacciones entre especies para descartar la existencia de órbitas periódicas en los modelos propuestos.

### 4.3. Resultados generales

**Teorema 4.1.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos especies que comparten espacios y recursos. Además, entre cada una de las especies se tiene competencia intraespecífica, sin embargo existe una relación mutualista entre ambas. Bajo las suposiciones anteriores el modelo propuesto está dado por

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 g_1(x_1, x_2), \\x_2' &= x_2 g_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Donde

$$\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} < 0, \quad \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} < 0,$$

describe la competencia intraespecífica.

Y

$$\frac{dg_1(x_1, x_2)}{dx_2} > 0, \quad \frac{dg_2(x_1, x_2)}{dx_1} > 0,$$

describe el beneficio recibido por cada especie al interactuar con individuos de la otra especie.

Entonces el sistema (4.5) tiene una función de Dulac en el interior de  $\Omega_1$ , donde:  $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ .

*Demostración.* Considérese el espacio

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Calculando el negativo de la divergencia del sistema (4.5) se tiene

$$-div(f_1, f_2) = -g_1(x_1, x_2) - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - g_2(x_1, x_2) - x_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}.$$

Factorizando la expresión anterior se tiene

$$\begin{aligned}-div(f_1, f_2) &= -g_1(x_1, x_2) - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - g_2(x_1, x_2) - x_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \\&= -\frac{1}{x_1} [x_1 g_1(x_1, x_2)] - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{1}{x_2} [x_2 g_2(x_1, x_2)] - x_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \\&= -\frac{1}{x_1} f_1 - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \frac{1}{x_2} f_2 - x_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente forma;

$$c(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} < 0, \quad \forall \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Aplicando el teorema (3.6), se tiene que resolver la ecuación (3.11). Para esto sea  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \text{div}(F)).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - \text{div}(F))}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{[f_1 x_2 + f_2 x_1]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema(4.5).

□

**Teorema 4.2.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos especies que comparten espacios y recursos. Supóngase que existen dos tipos de competencia en ambas especies. En primer lugar, competencia intraespecífica y además competencia interespecífica, la cual puede describir procesos donde ambas especies compiten por los recursos, por ejemplo cuando ovejas y vacas comparten espacio y recursos. Bajo las suposiciones anteriores el modelo propuesto está dado por

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 g_1(x_1, x_2), \\ x_2' &= x_2 g_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Donde

$$\frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} < 0, \quad \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} < 0,$$

describe la competencia intraespecífica entre individuos de la misma especie.

Y

$$\frac{dg_1(x_1, x_2)}{dx_2} < 0, \quad \frac{dg_2(x_1, x_2)}{dx_1} < 0,$$

describe la competencia entre especies.

*Demostración.* La demostración es análoga al teorema (4.1), el cual fue mencionado anteriormente.  $\square$

#### 4.3.1. Casos particulares de modelos de interacciones entre especies.

*En esta sección se construyen las funciones de Dulac a algunos modelos que aparecen en la literatura. Sin embargo, se puede concluir que no existen órbitas periódicas asociadas a los modelos simplemente aplicando los teoremas (4.1) y (4.2) a modelos.*

**Ejemplo 4.4.** *Se quiere estudiar la dinámica del siguiente modelo de mutualismo, para ello considérese dos especies, denotadas por  $x_1$  y  $x_2$  que interactúan por un bien en común, ya sea intercambiando recursos como (comida, agua, territorio), transporte o protección, este tipo de interacciones se denomina mutualismo, este tipo de modelo es analizado en [18] y [19], el modelo planteado es el siguiente:*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 r_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1 + b_{12} x_2} \right], \\ x_2' &= x_2 r_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2 + b_{21} x_1} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

*Para este caso consideramos  $\Omega = \{(x, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ , bajo las hipótesis del teorema (4.1) el modelo (4.7) no admite órbitas periódicas.*

*Demostración.* Calculamos el negativo de la divergencia del sistema (4.7)

$$-div(f_1, f_2) = -r_1 + \frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} + \frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} - r_2 + \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1} + \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1}.$$

El negativo de la divergencia se puede factorizar mediante los siguientes pasos;

$$\begin{aligned} -div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} \left[ x_1 r_1 \left( 1 - \frac{x_1}{k_1 + b_{12} x_2} \right) \right] - \frac{1}{x_2} \left[ x_2 r_2 \left( 1 - \frac{x_2}{k_2 + b_{21} x_1} \right) \right] + \frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} + \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1}, \\ &= -\frac{1}{x_1} f_1 - \frac{1}{x_2} f_2 + \frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} + \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1}, \\ &= -\left[ \frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2} \right] + \frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} + \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1}. \end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente manera;

$$c(x_1, x_2) = -\frac{r_1 x_1}{k_1 + b_{12} x_2} - \frac{r_2 x_2}{k_2 + b_{21} x_1} < 0.$$

Aplicando el teorema (3.6), se tiene que resolver la ecuación (3.11), y suponemos que  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \text{div}F).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - \text{div}F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{[f_1 x_2 + f_2 x_1]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.7). □

Para descartar la existencia de órbitas periódicas obsérvese que el sistema (4.7) satisface las condiciones del teorema (4.1) si las funciones de interacciones  $g_1(x_1, x_2)$  y  $g_2(x_1, x_2)$  se escriben como

$$g_1(x_1, x_2) = r_1 \left[ 1 - \frac{x_1}{k_1 + b_{12}x_2} \right] \quad \text{y} \quad g_2(x_1, x_2) = r_2 \left[ 1 - \frac{x_2}{k_2 + b_{21}x_1} \right].$$

A continuación se presenta el retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.7) (ver Figura 4.4), los parámetros utilizados para obtener el retrato fase son:  $r_1 = 2, k_1 = 1, b_1 = 5, r_2 = 0.5, k_2 = 3, b_2 = 4$ .

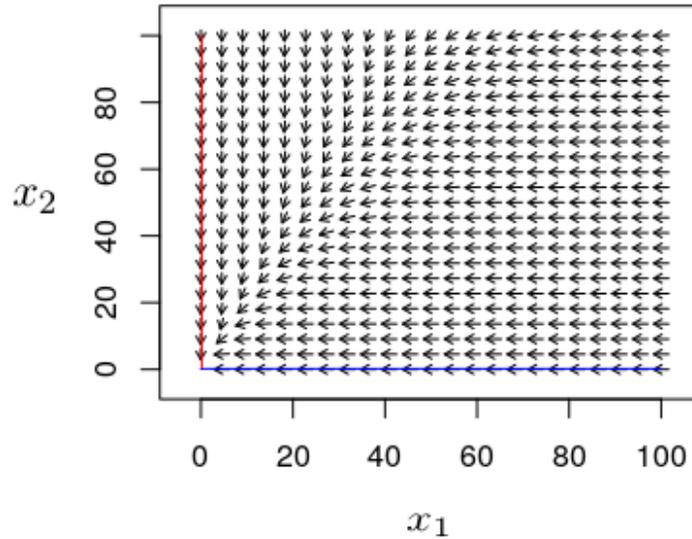


Figura 4.4: Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.7).

**Ejemplo 4.5.** Considerése el siguiente modelo de mutualismo y captura analizado en [22].

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(r_1 - k_1x_1 - b_1x_1x_2) - h_1x_1, \\ x_2' &= x_2(r_2 - k_2x_2 - b_2x_1x_2) - h_2x_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En este caso el subíndice  $i$  describe a la especie  $i$ .  $r_i, i = 1, 2$  es la tasa de crecimiento intrínseco.  $k_i$  es la tasa de competencia intraespecífica. La tasa de beneficio común de las interacciones entre individuos de ambas especies esta dada por  $b_i$ , finalmente, la tasa de cosecha de la especie  $i$  está dada por  $h_i$ . Entonces bajo las hipótesis del teorema (4.1) el sistema (4.8) no tiene órbitas periódicas.

*Demostración.* Cálculando el negativo de la divergencia del sistema (4.8)

$$-div(f_1, f_2) = -r_1 + 2k_1x_1 + b_1x_2 + h_1 - r_2 + 2k_2x_2 + b_2x_1 + h_2$$

El negativo de la divergencia la podemos factorizar, mediante los siguientes pasos;

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1}[(r_1 - k_1x_1 - b_{12}x_2)x_1 - h_1x_1] - \frac{1}{x_2}[(r_2 - k_2x_2 - b_{21}x_1)x_2 - h_2x_2] + k_1x_1 + k_2x_2 \\
&= -\frac{1}{x_1}f_1 - \frac{1}{x_2}f_2 + k_1x_1 + k_2x_2 \\
&= -\left[\frac{x_2f_1 + x_1f_2}{x_1x_2}\right] + k_1x_1 + k_2x_2
\end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente forma:

$$c(x_1, x_2) = -k_1x_1 - k_2x_2 < 0.$$

Aplicando el teorema (3.6), tenemos que resolver la ecuación (3.11), defínase la función  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \operatorname{div}F).$$

Así que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{(c - \operatorname{div}F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]}, \\
\frac{\partial \ln h}{\partial z} &= \frac{-\frac{x_2f_1 + x_1f_2}{x_1x_2}}{\left[ f_1x_2 + f_2x_1 \right]},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto:

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.8). □

*Para descartar la existencia de órbitas periódicas obsérvese que el sistema (4.8) satisface las condiciones del teorema (4.1) si las funciones de interacciones  $g_1(x_1, x_2)$  y  $g_2(x_1, x_2)$  se escriben como*

$$g_1(x_1, x_2) = r_1 - k_1x_1 - b_1x_1x_2 - h_1, \quad y \quad g_2(x_1, x_2) = r_2 - k_2x_2 - b_2x_1x_2 - h_2.$$

*A continuación se presenta el retrato fase del campo vectorial asociado al modelo(4.8) (ver Figura 4.5),*

los parámetros utilizados para obtener el retrato fase son:  $r_1 = 2, k_1 = 1, b_1 = 5, h_1 = 0.5, r_2 = 3, k_2 = 4, b_2 = 5, h_2 = 0.9$ .

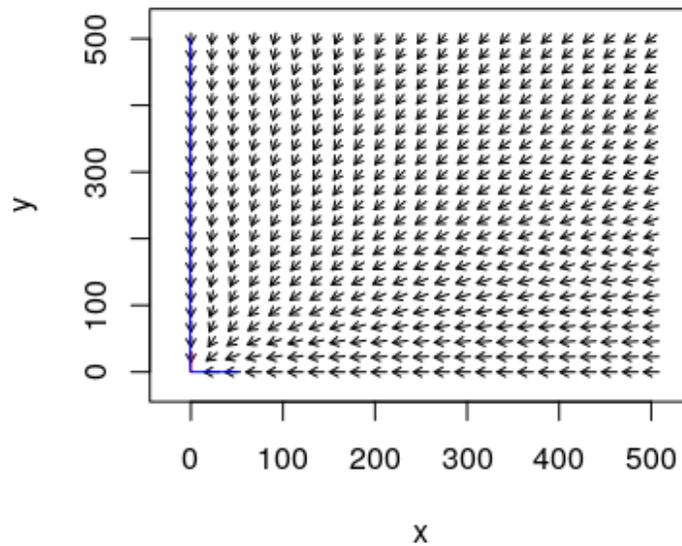


Figura 4.5: Retrato fase del campo vectorial asociado al modelo (4.8).

### 4.3.2. Generalización de modelos

En este apartado se presentan algunos resultados generalizados de los modelos presentados en la sección anterior, donde se excluye la existencia de órbitas periódicas. Modelos que presentan relaciones simbióticas, como mutualismo, competencia intraespecífica, competencia interespecífica o depredación.

Para construir una generalización de los sistemas (4.4), (4.7) y (4.8) considérense polinomios  $p_l(x_i)$  para  $l = 1, \dots, 8$  en las variables  $x_1$  y  $x_2$ , los cuales están dados por;

$$\begin{aligned}
p_1(x_1) &= a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \cdots + a_nx_1^n, \\
p_2(x_1) &= b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + \cdots + b_sx_1^s, \\
p_3(x_1) &= c_1x_1 + c_2x_1^2 + c_3x_1^3 + \cdots + c_tx_1^t, \\
p_4(x_1) &= d_1x_1 + d_2x_1^2 + d_3x_1^3 + \cdots + d_zx_1^z, \\
p_5(x_1) &= e_1x_1 + e_2x_1^2 + e_3x_1^3 + \cdots + e_mx_1^m, \\
p_6(x_2) &= h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3 + \cdots + h_wx_2^w, \\
p_7(x_2) &= g_1x_2 + g_2x_2^2 + g_3x_2^3 + \cdots + g_qx_2^q, \\
p_8(x_2) &= k_1x_2 + k_2x_2^2 + k_3x_2^3 + \cdots + k_rx_2^r,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde los coeficientes son no negativos para todos los polinomios.

**Teorema 4.3.** *Considérese el siguiente modelo de mutualismo que es una generalización del modelo (4.7) mencionado anteriormente.*

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1r_1 \left[ 1 - \frac{p_1(x_1)}{k_1 + b_{12}p_6(x_2)} \right] - bp_2(x_1), \\
x_2' &= x_2r_2 \left[ 1 - \frac{p_7(x_2)}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} \right] - cp_8(x_2).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Entonces el sistema (4.10) admite una función de Dulac, y por lo tanto el sistema no tiene órbitas periódicas para todo  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
-div(f_1, f_2) &= -r_1 + \frac{p_1(x_1)r_1}{k_1 + b_{12}p_6(x_2)} + \frac{x_1p_1'(x_1)r_1}{k_1 + b_{12}p_6(x_2)} + bp_2'(x_1) - r_2 \\
&\quad + \frac{p_7(x_2)r_2}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} + \frac{x_2p_7'(x_2)r_2}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} + cp_8'(x_2).
\end{aligned}$$

Derivando los polinomios se tiene que

$$\begin{aligned}
p_2'(x_1) &= (b_1 + b_2x_1 + b_3x_1^2 + \cdots + (s-1)b_sx_1^{s-1}) + \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_1^{k-1}, \\
p_8'(x_2) &= (k_1 + k_2x_2 + k_3x_2^2 + \cdots + (r-1)k_rx_2^{r-1}) + \sum_{j=2}^r (j-1)k_jx_2^{j-1}.
\end{aligned}$$

Considérese los siguientes cambios de variables;

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2x_1 + b_3x_1^2 + \cdots + (s-1)b_sx_1^{s-1}) &= w^{t-1}(x_1), \\ (k_1 + k_2x_2 + k_3x_2^2 + \cdots + (j-1)k_jx_2^{j-1}) &= h^{j-1}(x_2).\end{aligned}$$

Así se tiene que:

$$\begin{aligned}p'_2(x_1) &= w^{t-1}(x_1) + \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_1^{k-1}, \\ p'_8(x_2) &= h^{j-1}(x_2) + \sum_{j=2}^r (j-1)k_jx_2^{j-1}.\end{aligned}$$

Con los cambios de variables propuestos se tiene que la divergencia del campo vectorial está dada por;

$$\begin{aligned}-div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} \left[ r_1x_1 \left( 1 - \frac{p_1(x_1)}{k_1 + b_{12}p_6(x_2)} \right) - bx_1w^{t-1}(x_1) \right] \\ &\quad + \frac{p'_1(x_1)r_1}{k_1 + b_{12}p_1(x_2)} + b \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_2^{k-1} \\ &\quad - \frac{1}{x_2} \left[ r_2x_2 \left( 1 - \frac{p_2(x_2)}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} \right) - cx_2h^{j-1}(x_2) \right] \\ &\quad + \frac{p'_2(x_2)r_2}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} + c \sum_{j=2}^r (j-1)k_jx_2^{j-1}.\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}-div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1}f_1 - \frac{1}{x_2}f_2 + \frac{p'_1(x_1)r_1}{k_1 + b_{12}p_1(x_2)} + b \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_2^{k-1} \\ &\quad + \frac{p'_2(x_2)r_2}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} + c \sum_{j=2}^r (j-1)k_jx_2^{j-1}.\end{aligned}$$

Si la función  $c(x_1, x_2)$  esta dada por

$$\begin{aligned}c(x_1, x_2) &= -\frac{p'_1(x_1)r_1}{k_1 + b_{12}p_1(x_2)} - b \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_2^{k-1} \\ &\quad - \frac{p'_2(x_2)r_2}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} - c \sum_{j=2}^r (j-1)k_jx_2^{j-1}.\end{aligned}$$

Entonces la ecuación diferencial parcial que tiene como solución a una función de Dulac del sistema se reduce a

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.10).

□

Para descartar la existencia de órbitas periódicas obsérvese que el sistema (4.10) satisface las condiciones del teorema (4.1) si las funciones de interacciones  $g_1(x_1, x_2)$  y  $g_2(x_1, x_2)$  se escriben como

$$g_1(x_1, x_2) = r_1 - \frac{p_1^n(x_1)}{k_1 + b_{12}p_6(x_2)} - bp_2^{s-1}(x_1), \quad y \quad g_2(x_1, x_2) = r_2 - \frac{p_7^q(x_2)}{k_2 + b_{21}p_3(x_1)} - cp_8^{r-1}(x_2).$$

**Teorema 4.4.** Considere el siguiente modelo de mutualismo y captura, que es una generalización del modelo (4.8) mencionado anteriormente.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(r_1 - k_1p_1(x_1) - b_1p_6(x_2)) - h_1p_2(x_1), \\ x_2' &= x_2(r_2 - k_2p_7(x_2) - b_2p_3(x_1)) - h_2p_8(x_2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Donde:  $p_i(x_1)$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $p_6(x_2), p_7(x_2), p_8(x_2)$  son polinomios definidos en el sistema (4.9), entonces el sistema (4.11) admite una función de Dulac, por lo tanto no tiene órbitas periódicas para todo  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ .

*Demostración.* Cálculando el negativo de la divergencia del sistema (4.11)

$$\begin{aligned} -div(f_1, f_2) &= -r_1 + k_1p_1(x_1) + b_{12}p_6(x_2) + x_1p_1'(x_1)k_1 + p_2'(x_1)h_1 \\ &\quad - r_2 + k_2p_7(x_2) + b_{21}p_3(x_1) + x_2k_2p_7'(x_2) + h_2p_8'(x_2). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
p'_1(x_1) &= (a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + \cdots + a_nx_1^{n-1}) + \sum_{i=2}^n (i-1)a_ix_1^{i-1}, \\
p'_2(x_1) &= (b_1 + a_2x_1 + b_3x_1^2 + \cdots + b_sx_1^{s-1}) + \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_1^{k-1}, \\
p'_7(x_2) &= (g_1 + g_2x_1 + g_3x_1^2 + \cdots + g_sx_2^{s-1}) + \sum_{k=2}^q (k-1)g_kx_2^{k-1}, \\
p'_8(x_2) &= (k_1 + k_2x_1 + k_3x_1^2 + \cdots + k_tx_2^{t-1}) + \sum_{j=2}^z (j-1)b_jk_2^{j-1}.
\end{aligned}$$

Para reducir las expresiones algebraicas se proponen los siguientes cambios de variables.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + \cdots + a_nx_1^{n-1} &= t^{n-1}(x_1), \\
b_1 + a_2x_1 + b_3x_1^2 + \cdots + b_sx_1^{s-1} &= z^{s-1}(x_1), \\
g_1 + g_2x_1 + g_3x_1^2 + \cdots + g_sx_2^{s-1} &= w^{s-1}(x_2), \\
k_1 + k_2x_1 + k_3x_1^2 + \cdots + k_tx_2^{t-1} &= m^{t-1}(x_2).
\end{aligned}$$

Así que la expresión (4.12) puede escribirse como;

$$\begin{aligned}
-div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} [x_1(r_1 - k_1t^{n-1}(x_1) - b_{12}p(x_2)) - h_1x_1z^{s-1}(x_1)] \\
&\quad -\frac{1}{x_2} [x_2(r_2 - k_2w^{s-1}(x_2) - b_{21}p(x_1)) - x_2h_2m^{t-1}] \\
&\quad + x_1k_1 \sum_{i=2}^n (i-1)a_ix_1^{i-1} + h_1 \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_1^{k-1} \\
&\quad + x_2k_2 \sum_{k=2}^q (k-1)g_kx_2^{k-1} + h_2 \sum_{j=2}^z (j-1)b_jk_2^{j-1}.
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
-div(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1}f_1 - \frac{1}{x_2}f_2 + x_1k_1 \sum_{i=2}^n (i-1)a_ix_1^{i-1} + h_1 \sum_{k=2}^s (k-1)b_kx_1^{k-1} \\
&\quad + x_2k_2 \sum_{k=2}^q (k-1)g_kx_2^{k-1} + h_2 \sum_{j=2}^z (j-1)b_jk_2^{j-1}.
\end{aligned}$$

Sea la función  $c(x_1, x_2)$  dada por;

$$c(x_1, x_2) = -x_1 k_1 \sum_{i=2}^n (i-1) a_i x_1^{i-1} - h_1 \sum_{k=2}^s (k-1) b_k x_1^{k-1} \\ - x_2 k_2 \sum_{k=2}^q (k-1) g_k x_2^{k-1} - h_2 \sum_{j=2}^z (j-1) b_j k_2^{j-1}.$$

Aplicando el teorema (3.6) se tiene que resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi(c(x_1, x_2) - \text{div}(f_1, f_2)). \quad (4.13)$$

Supóngase que  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \text{div}F).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - \text{div}F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{\left[ f_1 x_2 + f_2 x_1 \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.11).

□

Para descartar la existencia de órbitas periódicas obsérvese que el sistema (4.11) satisface las condiciones del teorema (4.1) si las funciones de interacciones  $g_1(x_1, x_2)$  y  $g_2(x_1, x_2)$  se escriben como

$$g_1(x_1, x_2) = r_1 - k_1 p_1^n(x_1) - b_1 p_6^w(x_2) - h_1 p_2^{s-1}(x_1),$$

y

$$g_2(x_1, x_2) = r_2 - k_2 p_7^q(x_2) - b_2 p_3^t(x_1) - h_2 p_8^{r-1}(x_2).$$

**Teorema 4.5.** *Considérese el siguiente sistema, que representa otra generalización de los modelos (4.8), (4.7), presentados anteriormente;*

$$\begin{aligned}x_1' &= p_1(x_1)r_1(x_1, x_2) - f_1(x_2)x_1, \\x_2' &= p_2(x_2)r_2(x_1, x_2) - f_2(x_1)x_2.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Donde;

$$\begin{aligned}p_1(x_1) &= a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \cdots + a_nx_1^n, \\p_2(x_2) &= b_1x_2 + b_2x_2^2 + b_3x_2^3 + \cdots + b_mx_2^m.\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}f_1(x_2) &= \{0, 1, x_2, e^{x_2}, x_1 + x_2, p_1(x_2), \text{sen}(x_2), \text{o alguna combinación de ellos}\}, \\f_2(x_1) &= \{0, 1, x_1, e^{x_1}, x_1 + x_2, p_1(x_1), \text{sen}(x_1), \text{o alguna combinación de ellos}\}.\end{aligned}$$

Entonces el sistema (4.14) admite una función de Dulac para todo  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ .

*Demostración.* Cálculando el negativo de la divergencia del sistema (4.14)

$$\begin{aligned}-\text{div}(f_1, f_2) &= -[a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + \cdots + a_nx_1^{n-1}]r_1(x_1, x_2) + f_1(x_2) - r_1(x_1, x_2) \sum_{j=2}^n (j-1)x_1^{j-1} \\&\quad - p_1(x_1) \frac{\partial r_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} - [b_1 + b_2x_2 + b_3x_2^2 + \cdots + b_mx_2^{m-1}]r_2(x_1, x_2) + f_2(x_1) \\&\quad - r_2(x_1, x_2) \sum_{k=2}^m (k-1)x_2^{k-1} - p_2(x_2) \frac{\partial r_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

El negativo de la divergencia la podemos factorizar, mediante los siguientes pasos;

$$\begin{aligned}-\text{div}(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1}[p_1(x_1)r_1(x_1, x_2) - f_1(x_2)x_1] - r_1(x_1, x_2) \sum_{j=2}^n (j-1)x_1^{j-1} - p_1(x_1) \frac{\partial r_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\&\quad - \frac{1}{x_2}[p_2(x_2)r_2(x_1, x_2) - f_2(x_1)x_2] - r_2(x_1, x_2) \sum_{k=2}^m (k-1)x_2^{k-1} - p_2(x_2) \frac{\partial r_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\&= -\frac{1}{x_1}f_1 - \frac{1}{x_2}f_2 - r_1(x_1, x_2) \sum_{j=2}^n (j-1)x_1^{j-1} - p_1(x_1) \frac{\partial r_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} - p_2(x_2) \frac{\partial r_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\&\quad - r_2(x_1, x_2) \sum_{k=2}^m (k-1)x_2^{k-1}.\end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  de la siguiente manera;

$$c(x_1, x_2) = r_1(x_1, x_2) \sum_{j=2}^n (j-1)x_1^{j-1} + p_1(x_1) \frac{\partial r_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + r_2(x_1, x_2) \sum_{k=2}^m (k-1)x_2^{k-1} + p_2(x_2) \frac{\partial r_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Aplicando el teorema (3.6) se tiene que resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi(c(x_1, x_2) - \text{div}(f_1, f_2)). \quad (4.15)$$

Supóngase que  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \text{div}F).$$

Así que

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{(c - \text{div}F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{[f_1 x_2 + f_2 x_1]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.14). □

Para descartar la existencia de órbitas periódicas obsérvese que el sistema (4.14) satisface las condiciones del teorema (4.1) si las funciones de interacciones  $g_1(x_1, x_2)$  y  $g_2(x_1, x_2)$  se escriben como

$$g_1(x_1, x_2) = p_1^{n-1}(x_1)r_1(x_1, x_2) - f_1(x_2),$$

y

$$g_2(x_1, x_2) = p_2^{s-1}(x_2)r_2(x_1, x_2) - f_2(x_1).$$

#### 4.4. Otras generalizaciones

**Teorema 4.6.** *Considérese el siguiente modelo de fitoplancton-zooplancton, que es una generalización del modelo (4.4) mencionado anteriormente.*

$$\begin{aligned} x_1' &= rx_1 \left[ 1 - \frac{p_1(x_1)}{k} \right] - \alpha x_2 p_2(x_1), \\ x_2' &= \beta p_3(x_1)x_2 - cp_6(x_2) - \frac{\theta p_4(x_1)}{\gamma + p_5(x_1)} p_7(x_2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Este sistema admite una función de Dulac, por lo tanto no tiene órbitas periódicas, para todo  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ .

*Demostración.* El Modelo de fitoplancton-zooplancton dado por (4.16) admite a  $h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$  como función de Dulac. Para construir la función de Dulac se buscará una solución de la ecuación diferencial parcial dada por Osuna y Cruz [19]. Para esto observe que el negativo de la divergencia del campo vectorial asociado al sistema (4.16) está dada por;

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(f_1, f_2) &= -r \left[ 1 - \frac{a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 \cdots + a_n x_1^{n-1}}{k} \right] + \frac{r}{k} \sum_{j=2}^n (j-1) a_j x_1^{j-1} \\ &\quad + \alpha x_2 [b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_1^2 + \cdots + x_1^{s-1}] + \alpha x_2 \sum_{j=2}^s (j-1) b_j x_1^{j-1} \\ &\quad - \beta p_3(x_1) + c [h_1 + h_2 x_2 + h_3 x_2^2 + \cdots + h_w x_2^{w-1}] + c \sum_{k=2}^w (k-1) h_k x_2^{k-1} \\ &\quad + \frac{\theta p_4(x_1)}{\gamma + p_5(x_1)} [g_1 + g_2 z + g_3 z^2 + \cdots + g_q z^{q-1}] + \frac{\theta p_4(x_1)}{\gamma + p_5(x_1)} \sum_{k=2}^q (k-1) g_k x_2^{k-1}. \end{aligned}$$

Después de algunas factorizaciones se tiene que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(f_1, f_2) &= -\frac{1}{x_1} f_1 - \frac{1}{x_2} f_2 + \frac{r}{k} \sum_{j=2}^n (j-1) a_j x_1^{j-1} + \frac{\theta p_4(x_1)}{\gamma + p_5(x_1)} \sum_{k=2}^q (k-1) g_k x_2^{k-1} \\ &\quad + \alpha x_2 \sum_{j=2}^s (j-1) b_j x_1^{j-1} + c \sum_{k=2}^w (k-1) h_k x_2^{k-1}. \end{aligned}$$

Defínase la función  $c(x_1, x_2)$  como;

$$\begin{aligned} c(x_1, x_2) &= -\frac{r}{k} \sum_{j=2}^n (j-1) a_j x_1^{j-1} - \frac{\theta p_4(x_1)}{\gamma + p_5(x_1)} \sum_{k=2}^q (k-1) g_k x_2^{k-1} - \alpha x_2 \sum_{j=2}^s (j-1) a_j x_1^{j-1} \\ &\quad - c \sum_{k=2}^w (k-1) h_k x_2^{k-1}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema (3.6) se tiene que resolver la siguiente ecuación diferencial parcial

$$f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi(c(x_1, x_2) - \text{div}(f_1, f_2)), \quad (4.17)$$

cuya solución es una función de Dulac.

Si suponemos que  $\Phi = h(z)$ , donde  $z = z(x_1, x_2)$ , entonces se tiene que

$$\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right] \frac{\partial h}{\partial z} = h(c - \text{div}(F)).$$

Así que

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{h} = \frac{(c - \text{div}F)}{\left[ f_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \right]}$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = \frac{-\frac{x_2 f_1 + x_1 f_2}{x_1 x_2}}{[f_1 x_2 + f_2 x_1]},$$

$$\frac{\partial \ln h}{\partial z} = -\frac{1}{z}.$$

Por lo tanto

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2},$$

es una función de Dulac para el sistema (4.16).

□

## 4.5. Conclusiones y Perspectivas

Conocer la existencia o no existencia de órbitas periódicas asociadas a modelos de la biomatemática es de interés fundamental para esta área. Lo anterior es debido a que cualquiera de los dos escenarios posibles (existencia o no existencia de órbitas periódicas) tiene implicaciones en la dinámica del fenómeno en cuestión. Por ejemplo, en la ecología matemática la existencia de órbitas periódicas puede ser un escenario catastrófico para las poblaciones, ya que si la amplitud de las oscilaciones es muy grande puede ser que bajo pequeñas perturbaciones en el hábitat la población este ante un escenario de extinción. Sin embargo, cuando no existen órbitas periódicas como soluciones del modelo se puede demostrar que las poblaciones, bajo algunas condiciones sobre los parámetros del modelo, tienden a un equilibrio poblacional.

Si bien existen criterios para demostrar existencia o no existencia de órbitas periódicas de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, como por ejemplo, el mapeo de Poincaré o el criterio de Bendixson-Dulac respectivamente, queda mucho por conocer sobre existencia o no existencia de órbitas periódicas asociadas a modelos de la biomatemática.

Particularmente, para descartar la existencia de órbitas periódicas es utilizado el criterio de Bendixson-Dulac, sin embargo, para aplicar este criterio se necesita una función, la cual es llamada función de Dulac, que permite conocer si la divergencia de asociada a un campo vectorial nunca es cero. En ese sentido, en los últimos tiempos en ([19],[25],[22],[21]) se ha perfeccionado un método para construir funciones de Dulac, sin embargo, el problema es cambiado por el problema de encontrar una solución de una ecuación diferencial parcial, para lo cual se necesita una nueva función  $c(x_1, x_2)$ , la cual no cambia de signo.

En ese sentido, realmente el problema en esencia era complejo, pues no existía más que la experiencia del investigador como insumo para encontrar tanto la función de Dulac como la función  $c(x_1, x_2)$ . Motivado por esta problemática es que en este trabajo se propone un método que permite proponer dicha función  $c(x_1, x_2)$ , para algunos modelos de la biomatemática, lo que permitirá descartar la existencia de órbitas periódicas en modelos de interacciones entre especies.

Es así, que en el modelo del tipo Lotka-Volterra (4.2), donde dinámica de este modelo es compleja, pues se tienen hasta siete puntos fijos, además se sabe poco del comportamiento en cada punto fijo, o si el en campo vectorial presenta una órbita periódica. Sin embargo con los resultados propuestos, se construyó una función de Dulac descartando la existencia de órbitas periódicas en el modelo analizado, la función de Dulac es de la siguiente forma;

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}. \quad (4.18)$$

En el segundo caso, se analizó un modelo epidemiológico SIR, en particular este es un modelo que describe la propagación de una enfermedad infecciosa, tal enfermedad es el virus de herpes (4.3), para este caso la función de Dulac construida es de la siguiente forma;

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}. \quad (4.19)$$

Para este caso también se descarta la existencia de órbitas periódicas en el sistema analizado, una consecuencia de esto es que puede ocurrir que en el comportamiento dinámico no se llegue a observar equilibrio endémico de la enfermedad [17].

En el tercer caso, se analizó el modelo fitoplancton-zoplancton (4.4), el cual con los resultados propuestos, se observó que su función de Dulac es de la forma;

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}. \quad (4.20)$$

La interpretación biológica que se puede obtener de este resultado, es que en la interacción de ambas especies simbiotes, bajo el modelo (4.4) donde hay competencia intráespecífica o interespecífica, es que no hay la coexistencia de especies, es decir, una de las dos especies puede llegar a la extinción, ya que la asociación entre especies impacta directamente en la capacidad de carga [41],[33].

Para el cuarto caso, dentro de la sección de resultados generales, se analizó un modelo de mutualismo, para el cual se pudo construir una función de Dulac de la siguiente manera;

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}. \quad (4.21)$$

En este caso debido al resultado (4.1) propuesto anteriormente, se descarta la existencia de la órbita periódica en este modelo, entonces una implicación biológica en el sistema, es que no hay coexistencia en los dos organismos simbiotes, es decir al menos la capacidad de carga de alguna de las especies puede desaparecer, ya sea por pérdida de algún recurso o por depredación, entre otros factores, [10], [37].

Para el quinto caso, dentro de la sección de resultados generales, el modelo analizado, fue un modelo de mutualismo y captura, para el cual se pudo construir una función de Dulac similar a la mostrada en (4.21).

En la sección de generalización de modelos se propusieron algunos casos de modelos donde el sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra en función de algunos polinomios, esta propuesta de los modelos permite dar algunos resultados que facilitan el estudio de la dinámica aún cuando los modelos dependen de funciones polinomiales, así como cualquier combinación del conjunto de funciones propuestas, a estos sistemas dinámicos continuos se le construyó la función de Dulac para cada modelo propuesto.

Este trabajo pretende aportar en la construcción de criterios de no existencia de órbitas periódicas asociadas a un sistema dinámico continuo. Particularmente en la construcción de funciones de Dulac para modelos de la biología matemática, la cual es un área en pleno desarrollo, donde se carece de

herramientas suficientes que permitan conocer la evolución del fenómeno a estudiar. En trabajos futuros se profundizará en la construcción de un método que permita construir funciones de Dulac para campos vectoriales mas generales que los analizados en este trabajo.

# Bibliografía

- [1] Bansal D., Ave P., Kerneis S., Frileux P., Boche O., Catherine A., Dubost G., Leguern A., **An ex-vivo Human Intestinal Model to Study Entamoeba histolytica Pathogenesis**, Institut Pasteur, Unité de Biologie Cellulaire du Parasitisme, Paris 2009.
- [2] Braun M., **Differential Equations and Their Applications**, Springer-Verlag New York, Inc, 1983.
- [3] Begon M., Townsed C., Harper J., **Ecology From Individuals to Ecosystems**, Fourth Edition by Blackwell Publishing Ltd, 2006.
- [4] Bendixson I., **Sur curbes définies par équations différentielles**, Acta Math. No.24 (1901), pp 1-88.
- [5] Busenberg S. Van Den Drieseche, **A Method for Proving the Nonexistence of Limit Cycles**, J Math Anal. Appl. 172(1993),pp. 493-479.
- [6] Detlef E., Beck E., Mçller K., **Plant Ecology**, ISBN 3-540-20833-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [7] Fečkan M., **A Generalization of Bendixson's criterion**, Proceedings Of The American Mathematical Society, Volume 129, Number 11, Pages 3395-3399.
- [8] Fishman M., Hadany L., **Plant-pollinator population dynamics, Department of Molecular Biology and Ecology of Plants**, Faculty of Life Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel, Theoretical Population Biology 78 (2010) 270-277.
- [9] Guckenheimer J., Philip Holmes; **Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields**, Springer-Velarg, Newyork(1983) .
- [10] Gruner W., Peckham B., Pastor J., **A Bifurcation Analysis of a Differential Equations Model for Mutualism**, Lake Superior College, Duluth, MN, USA, Bulletin of Mathematical Biology (2006) 68: 1851-1872.

- [11] Haddad W., Chellaboina, V., **Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach**. Princeton University Press, 2008.
- [12] Hari B., Pattabhi N., **Discrete Model of Commensalism Between Two Species**, Department of Mathematics, Chaitanya Degree College, Hanamkonda, A.P. India, I.J.Modern Education and Computer Science, 2012, 8, 40-46,2012.
- [13] Hernandez M., Barradas I., **Variation in the outcome of population interactions: bifurcations and catastrophes**, J. Math. Biol. 46, 571-594 (2003).
- [14] Hirsh M., **S. Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**; Academic Pres(1997).
- [15] <https://cran.r-project.org/web/packages/phaseR/phaseR.pdf>.
- [16] Leslie P., **Some further notes on the use of matrices in population mathematics**, Biometrika 35 (1948).
- [17] Li G., **Bifurcation Analysis of an SIR Epidemic Model with the Contact Transmission Function**, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 930541, 7 pages.
- [18] Murray J., **Mathematical Biology**, Springer-Verlag,(1989).
- [19] Osuna O., Vargas C., **Construction of Dulac functions for mathematical models in population biology**, International Journal of Biomathematics, Vol. 8, No. 3 (2015), 1550035 (21 pages).
- [20] Osuna O.,Rodríguez J., **On the Limit Cycles for Liénard Equation**, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol. 10, 2015, no. 7, 311 - 316.
- [21] Osuna O., Villaseñor G., **On the Dulac functions**; Qualitative Theory of Dynamical Systems, Vol. 10, No.1, (2011), 43-49.
- [22] Osuna O., Rodríguez J.,Vargas C., Villaseñor G., **On the existence and construction of Dulac functions**, 2000, Classifications numbers AMS. 34A34, 34C25.
- [23] Osuna O., Villaseñor G; **Órbitas Periódicas de Sistemas Planos**; Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana, **AVANZA. Vol. I. FM-IIT, UACJ(2011) 19-34.**
- [24] Osuna O., Villaseñor G., **Some properties of the Dulac functions set**, E.J. of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 72, (2011), 1-8.
- [25] Osuna O., Villavicencio G., **Generating Dulac Funtions For Differential Equations And Biological Models**, **AVANZA. Vol. VI. FM-IIT, UACJ(2016) 1-8.**

- [26] Perko L., **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer-Verlag(2006).
- [27] Poincaré, H., **Sur les courbes définies par équations différentielle**, Oeuvres,1,Paris(1862).
- [28] Robert D., **Diferential Equations, Dynamical Systems, And Introduction To Chaos**, 2004, Elsevier (USA).
- [29] Rudin W., **Priciples od Mathematical Analysis**, Third Edition, McGraw-hill, 1976.
- [30] Sarkar R., Chattopadhyay J., **Occurrence of planktonic blooms under environmental fluctuations and its possible control mechanism-mathematical models and experimental observations**, Embryology Research Unit, Indian Statistical Institute, 203, B.T. Road, Kolkata 700 108, India, Journal of Theoretical Biology 224 (2003) 501-516.
- [31] RStudio Team (2015). **RStudio: Integrated Development for R**. RStudio, Inc., Boston, MA URL <http://www.rstudio.com/>.
- [32] Smith R., **An Index Theorem and Bendixson's Negative Criterion for Certain differential Equations of higher Dimension**, Proc. Royal Soc. Edinburgh Set. A 91(1981),pp 63-77.
- [33] Singh A., Gakkhar S., **Analysis of Delayed Toxin Producing Phytoplankton-Zooplankton System**, International Journal of Modeling and Optimization, Vol. 2, No. 6, December 2012.
- [34] Smith T., Smith R., **Ecología**, Sexta Edición, Pearson Educación, S.A, Madrid, 2007.
- [35] Susan R., S. Muntean, F. Avellan, I. Anton, **Mathematical modelling of swirling flow in hydraulic turbines for the full operating range**, Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 4759-4773.
- [36] Ukibe N., Mbanugo I., N., Alphonsus O. and Ukibe R., **A Review of Host-Parasite Relationships**, Department of Prosthesis and Orthopaedic Technology, School of Health Technology, Federal University of Technology, Owerri, Imo State, Nigeria, annual research & review in biology 5(5): 372-384, 2015.
- [37] Wang Y. , Wu H., **A mutualism-competition model characterizing competitors with mutualism at low density**, School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, PR China, Mathematical and Computer Modelling, Diciembre 2010.
- [38] Wiggins S., **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**, segunda edición, 2003, Springer.
- [39] Yokoi H., Uehara T., Kawai T., **Lattice and Lattice Gas Models for Commensalism: Two Shellfishes in Intertidal Zone**, School of Science and Technology, Shizuoka University, Naka-ku, Hamamatsu, Japan, Open Journal of Ecology, 2014, 4, 671-677.

- [40] Yu, Ilyashenko, **Centennial History of Hilbert's 16th Problem**. **Bulletin of the American Mathematical Society**, No.39 (2002), pp. 301-354.
- [41] Zhang W., Zhao M., **Dynamical Complexity of a Spatial Phytoplankton-Zooplankton Model with an Alternative Prey and Refuge Effect**, School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325035, China, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics, 2013.

# Apéndice A

**Teorema A.1.** (Teorema de la función implícita) ver [29]

Sea  $f \in C^1$  un mapeo en un conjunto abierto  $E \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f(a, b) = 0$  para algún punto  $(a, b) \in E$ .  
Sea  $A = f'(a, b)$  y asuma que  $A_x$  es invertible.

Entonces existen conjuntos abiertos  $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$  y  $W \subset \mathbb{R}^m$  con  $(a, b) \in U$  y  $b \in W$ , teniendo las siguientes propiedades:

Para cada  $y \in W$  le corresponde un único  $x$  tal que

$$(x, y) \in U \quad y \quad f(x, y) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Si esta  $x$  se define como  $g(y)$ , entonces  $g$  es  $C^1$  mapeando de  $W$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $g(b) = a$ ,

$$f(g(y), y) = 0 \quad y \in W. \quad (\text{A.2})$$

Y

$$g'(b) = -(A_x)^{-1}A_y. \quad (\text{A.3})$$

La función  $g$  es implícitamente definida por la ecuación A.2, de ahí el nombre del teorema.

La ecuación  $f(x, y) = 0$  puede ser escrita como un sistema de  $n$  ecuaciones en  $n + m$  variables

$$\begin{aligned} & f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \\ & \vdots \\ & f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La suposición de que  $A_x$  es invertible significa que la matriz  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_1 f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n f_1 & \dots & D_n f_n \end{bmatrix}$$

*Evaluada en  $(a, b)$  define un operador lineal en  $\mathbb{R}^n$ , en otras palabras estos vectores columna deberían ser independientes o equivalentes, este determinante debe ser distinto de cero. Más aún el sistema de ecuaciones A.4 se sigue cumpliendo cuando  $x = 1$  y  $y = b$ . Entonces la conclusión del teorema es que el sistema A.4 puede ser resuelto por  $x_1, \dots, x_n$  en términos de  $y_1, \dots, y_m$  para todo  $y$  cerca de  $b$ , y que estas soluciones son funciones continuamente diferenciables de  $y$ .*

## Apéndice B

### Teorema B.1. (Green)

Sea  $C$  una curva cerrada, simple, suave a trozos y positivamente orientada en el plano, y sea  $D$  la región limitada por la curva  $C$ , e incluyendo a  $C$ . Si  $F_1(x, y)$  y  $F_2(x, y)$  son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta  $R$  que contenga a  $D$  con  $D \subset R$  entonces

$$\oint_C [F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy] = \int \int_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

*Demostración.* Se demostrará el teorema de Green para un caso particular, para ello se debe probar:

$$\oint F_1 dx = - \int \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dA. \quad (\text{B.1})$$

y

$$\oint F_2 dy = \int \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA. \quad (\text{B.2})$$

Para demostrar B.1 considérese la siguiente región:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

La cual es una región del tipo 1, mostrada en la Figura B.1, donde  $g_1$  y  $g_2$  son funciones continuas, observe que la curva puede ser dividida en dos partes

$$C = C_1 \cup C_2.$$

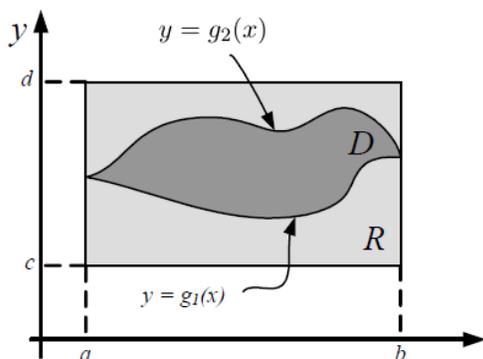
Donde  $C_1$  es la parte inferior de la curva definida por

$$C_1 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y = g_1(x)\},$$

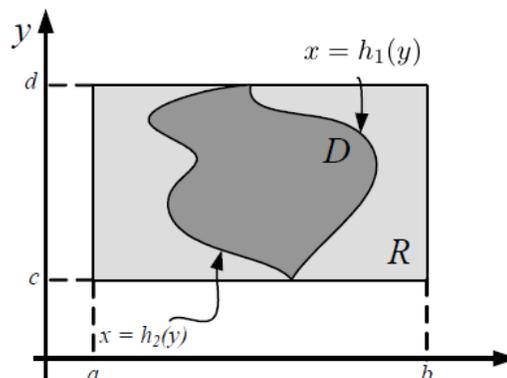
y  $C_2$  se define de la siguiente manera:

$$C_2 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y = g_2(x)\}.$$

La cual es una región del tipo 2, mostrada en la Figura B.2



Cuadro B.1: Región del tipo 1.



Cuadro B.2: Región del tipo 2.

Tomando la orientación positiva de la curva dada y empleando la definición de integral de línea, tenemos

$$\begin{aligned} \oint F_1(x, y) dx &= \int_{C_1} F_1(x, y) dx + \int_{C_2} F_1(x, y) dx, \\ &= \int_a^b F_1(x, g_1(x)) dx - \int_a^b F_1(x, g_2(x)) dx, \\ &= \int_a^b [F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))] dx. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Tomando la orientación positiva de la curva, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx, \\ &= \int_a^b F_1(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx, \\ &= \int_a^b [F_1(x, g_2(x)) - F_1(x, g_1(x))] dx. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Al sumar las ecuaciones B.3 y B.4 se obtiene:

$$\oint F_1 dx = - \int \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dA. \quad (\text{B.5})$$

Que es la primer igualdad que se quería probar, Ahora supongamos que la región  $D$  puede ser definida de la siguiente manera:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Una región del tipo  $II$ , donde  $h_1(y)$  y  $h_2(y)$  son funciones continuas.

Así la curva  $C$  puede dividirse en dos partes

$$C = C_3 \cup C_4.$$

Donde  $C_3$  es la parte izquierda de la curva que puede ser definida por

$$C_3 = \{(x, y) | c \leq x \leq d, x = h_1(x)\}.$$

Y  $C_4$  es la parte derecha de la curva definida por

$$C_4 = \{(x, y) | c \leq x \leq d, x = h_2(y)\}.$$

Tomando la orientación definida por la curva dada de la definición de integral de línea se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_C F_2(x, y) dy &= \int_{C_3} F_2(x, y) dy + \int_{C_4} F_2(x, y) dy, \\ &= - \int_c^d F_2(h_1(y), y) dy + \int_c^d F_2(h_2(y), y) dy, \\ &= \int_c^d [F_2(h_2(y), y) - F_2(h_1(y), y)] dy. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy, \\ &= \int_c^d F_2(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy, \\ &= \int_c^d [F_2(h_2(y), y) - F_2(h_1(y), y)] dy. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sumando las ecuaciones B.6 y B.7 se obtiene que

$$\oint F_2 dy = \int \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA. \quad (\text{B.8})$$

Al igualar las ecuaciones B.5 y B.8 se obtiene que

$$\oint F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int \int_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Así la prueba esta completa. □



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00184

Matrícula: 2163803470

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE DULAC PARA MODELOS DE LA BIOLOGIA MATEMÁTICA.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 28 del mes de junio del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ  
DR. JOSE GEISER VILLAVICENCIO PULIDO  
DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: EMMANUEL MENDOZA TRINIDAD



EMMANUEL MENDOZA TRINIDAD  
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOGAL

DR. JOSE GEISER VILLAVICENCIO PULIDO

SECRETARIO

DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO